2

الجبر و التحليل الرياضي

دروس وتمارين محلولة

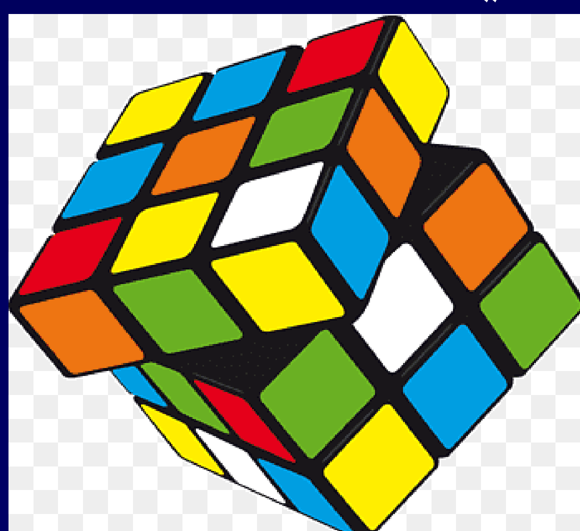
Lessons and solved exercises in both Arabic and English

Algebra 2 & Analysis 2

إعداد:

الأستاذ الدكتور براهيمي ابراهيم

الدكتورة عبدلي جيهان



مقياس الرياضيات للسنة الأولى علوم المادة حسب المقرر الوزاري

Mathematics module for the first year of Material Sciences according to the ministerial curriculum

جامعة محمد خيضر بسكرة

University Mohamed Khider Biskra

Preface مقدمـــة

هذه الدروس مخصصة لطلاب السنة الأولى لقسم علوم المادة وفق المنهج المقدم من طرف الوزارة لمقياس الرياضيات للسنة الأولى من جبر وتحليل رياضي. هذا المقياس مقسم إلى جزئيين على سداسيين دراسيين حيث يدرس الطلبة في السداسي الأول مقياس رياضيات 1 وفي السداسي الثاني مقياس رياضيات 2، وتعد هذه المادة مادة أساسية تابعة للوحدة الأساسية التي لها معامل 3 ورصيد 6. يحتسب معدل هاته المادة بمجموع 33% من نقطة الأعمال التوجيهية و 67% من نقطة الامتحان المحروس في كل سداسي.

These lessons are intended for first-year students of Material Sciences department, according to the curriculum provided by the ministry, the mathematics scale for the first year of algebra and mathematical analysis. This scale is divided into two parts over two semesters, where students study in the first semester Maths 1, and in the second semester Maths 2. The average for this course is calculated by the sum of 33% of the TS point and 67% of the exam point score in each semester.

يمكن أن تكون هذة الدروس تأسيسية للسنة الأولى وتمهيدية للسنة الثانية وتكون نقطة البداية لمزيد من التدريب في حساب التكاملات والمصفوفات وحل المعادلات التفاضلية. تمت كتابة هذه الدروس بطريقة واضحة وبسيطة لتحفيز الطلاب على تعلم المبادئ والمفاهيم الأساسية للجبر والتحليل الرياضي، في محاولة لتبسيط التعاريف والتفسيرات لطرق التفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية، الذي يتطلب وصف الظاهرة الفيزيائية أو الكيميائية أو غيرها ومعرفة أشياء معينة حول هذه الظواهر، أو الملاحظات، أو العينات.

These lessons can be foundational for the first year and introductory to the second year, at the starting point for further training in calculating integrals and matrices and solving differential equations. These lessons have been written in a clear and simple way to motivate students to learn the basic principles and concepts of algebra and mathematical analysis, in an attempt to simplify definitions and interpretations of calculus methods and differential equations, which requires describing a physical, chemical or other phenomenon and knowing certain things about these phenomena, observations, or samples.

في هذه الدروس، قمنا بدمج أمثلة وتمارين تمت معالجتها بعناية. وبعض التمارين يمكن أن تتواجد في المواقع المختلفة تم التدقيق فيها وترجمتها للغة العربية، وينقسم هذا العمل إلى جزئيين، أولها مخصص للجبر والثاني للتحليل الرياضي في كل سداسي دراسي، حيث نتطرق في آخر كل فصل لسلسلة من التمارين المحلولة التي تساعد في تعميق وترسيخ المفاهيم.

In these lessons, we have incorporated carefully processed examples and exercises. Some of the exercises can be found in different sites that have been scrutinized and translated into Arabic. This work is divided into two parts, the first of which is devoted to algebra and the second is devoted to mathematical analysis in each semester. At the end of each chapter, we discuss a series of solved exercises that help in deepening and consolidating concepts.

Contents

الفهرس

القسم الأول

الجزء الأول : الجبــــر 2

Part One : Algebra 2

الفصل الأول

المصفوفات *Matrices*

فهرس الفصل

في سنة 1855 قدم آرثر كايلي المصفوفة على أنها تمثيل لعناصر خطية، وهذه الفترة اعتبرت بداية الجبر الخطي ونظرية المصفوفات. وتُستخدم المصفوفات وتطبيقاتها في معظم المجالات العلمية، في كل فرع من فروع الفيزياء مثل الميكانيكية والبصريات الهندسية والكهرومغناطيسية

وميكانيكي الكم ولدراسة الظواهر الفيزيائية مثل حركة الأجسام الصلبة وأيضا في رسومات الكمبيوتر ومعالجة النماذج الثلاثية الأبعاد وعرضها على شاشة ثنائية الأبعاد، كما تستخدم في نظريات الاحتمالات والإحصاء، وفي الاقتصاد تستخدم لوصف أنظمة العلاقات الاقتصادية.

In 1855 Arthur Cayley introduced the matrix as a representation of linear elements, and this period is considered the beginning of linear algebra and matrix theory. Matrices and their applications are used in most scientific fields, in every branch of physics, such as mechanics, engineering optics, electromagnetism, quantum mechanics, and for studying physical phenomena such as the movement of solid bodies, as well as in computer graphics, processing three-dimensional models and displaying them on a two-dimensional screen, as well as in probability theories and statistics, and in economics is used to describe systems of economic relations.

1.1 تعاريـــف *Definitions*

1.1.1 : Definition - تعريف

ليكن n و p عددان طبيعيان غير معدومين.

Let n and p be two non-zero natural numbers.

1) المصفوفة A هي جدول مستطيل من عناصر الحقل $\mathbb{K}$ الذي يمكن أن يكون مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو المركبة $\mathbb{C}$.

The matrix A is a rectangular table of elements of the field $\mathbb{K}$ which can be the set of real numbers $\mathbb{R}$ or the complex $\mathbb{C}$.

2) A هي من الرتبة أو من الصنف $n{\times}p$ إذا كان الجدول متكون من n سطر و p عمود

A is of order or of class $n{\times}p$ if the table consists of n rows and p columns.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad or \qquad A = (a_{ij})_{1\le i\le n; 1\le j\le p}\,.$$

3) عناصر الجدول تسمى عوامل المصفوفة A.

The elements of the table are called the coefficients of the matrix A.

4) العامل المتواجد في وضعية تقاطع السطر i مع العمود j يرمز له بالرمز a_{ij}.
The coefficient at the intersection of the line i and the column j are denoted by a_{ij}.

1.1.1 : Example - مثال

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة من الصنف 3×2 أي ثلاثة أسطر وعمودين، و على سبيل المثال $a_{11} = 5$ و $a_{22} = 3$.
It is a matrix of class 3×2 i.e. three rows and two columns, for example $a_{11} = 5$ and $a_{22} = 3$.

2.1.1 : Example - مثال

.

1) المصفوفة — *The matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{5} & 5 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة 2×3 تتكون من سطرين وثلاثة أعمدة.
is a 2×3 matrix consisting of two lines and three columns.

2) a_{23} هو المعامل الموجود عند تقاطع السطر الثاني والعمود الثالث هو يساوي 5.
a_{23} is the coefficient at the intersection of the second line and the third column is equal to 5.

2.1.1 : Definition - تعريف

مجموعة المصفوفات التي تحتوي على n سطر و p عمود ذات المعاملات في $\mathbb{K}$ يرمز لها بالرمز $M_{n,p}(\mathbb{K})$. و عناصر الفضاء الشعاعي $M_{n,p}(\mathbb{R})$ تسمى مصفوفات حقيقية.
The matrix set containing n line and p column with coefficients in $\mathbb{K}$ denoted by $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
The vector space elements of $M_{n,p}(\mathbb{R})$ are called real matrices.

1.1.1 مصفوفات خاصة Special matrices

فيما يلي بعض أنواع المصفوفات المثيرة للاهتمام:

Here are some interesting types of matrices:

1) إذا كان $n = p$ (عدد الأسطر مساوي لعدد الأعمدة)، في هذه الحالة نقول عن المصفوفة أنها مربعة عندها نرمز لمجموعة المصفوفات بالرمز $M_n(\mathbb{K})$ بدل الرمز $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

If $n = p$ (the number of rows is equal to the number of columns), in this case we say that the matrix is square, then we denote the set of matrices by $M_n(\mathbb{K})$ instead of $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ تشكل قطر المصفوفة.

The elements $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ make up the diagonal of the matrix.

2) إذا كان $p = 1$ ، فإن A عبارة عن مصفوفة عمود:

If p=1, then A is a column matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

3) إذا كان $n = 1$ ، فإن A عبارة عن مصفوفة سطر:

If $n = 1$, then A is a line matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}.$$

4) المصفوفة (من الصنف $n \times p$) التي تكون جميع معاملاتها أصفارا تسمى المصفوفة الصفرية أو المعدومة ويرمز لها بالرمز $0_{n,p}$ أو أكثر ببساطة 0. في حساب المصفوفة، تلعب المصفوفة الصفرية دور الرقم 0 بالنسبة للأعداد الحقيقية.

A matrix (of class $n \times p$) whose coefficients are all zeros is called a zero, or zero-matrix and is denoted by $0_{n,p}$ or more simply 0. In matrix arithmetic, the zero matrix plays the role of the number 0 for real numbers.

3.1.1 : Example - مثال

.

1) المصفوفة — *The matrix*

$$M = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة عمود. — *is a column matrix.*

2) المصفوفة — *The matrix*

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة سطر. — *is a line matrix.*

3) المصفوفة — *The matrix*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 6 \\ -4 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة مربعة من الرتبة 3. — *it is a square matrix of order 3.*

4) المصفوفة — *The matrix*

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة صفرية أو المصفوفة المعدومة. — *is the zero matrix or the null matrix.*

تسمى المصفوفة المربعة التالية بمصفوفة الوحدة

The next square matrix is called the unity matrix

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

عناصرها القطرية تساوي 1 وجميع عناصرها الأخرى تساوي 0. ونرمز لها بالرمز I_n أو ببساطة بالرمز I.

Its diagonal elements are 1 and all its other elements are 0. We denote it by I_n or simply by I

في حساب المصفوفة ، تلعب مصفوفة الوحدة دورا مشابها لدور الرقم 1 بالنسبة للأعداد الحقيقية. فهو العنصر الحيادي بالنسبةلعملية الجداء.

In matrix arithmetic, the unit matrix plays a role similar to that of the number 1 for real numbers. It is the neutral element for the multiplication.

1.1.1 : Proposition - قضيــة

إذا كانت A مصفوفة من الصنف $n \times p$ فإن

If A is a matrix of class $n \times p$ then

$$I_n \cdot A = A \qquad and \qquad A \cdot I_p = A.$$

5) **تكون المصفوفة A المربعة تناظرية إذا كانت مساوية لمنقولها، أي إذا كان:**

The matrix A squared is symmetric if it is equal to its transpose, that is, if we have:

$$A = A^T,$$

أو إذا كان $a_{ij} = a_{ji}$ من أجل كل $i, j = 1, \dots, n$. بصورة أخرى، تكون معاملات المصفوفة متناظرة بالنسبة للقطر.

or if $a_{ij} = a_{ji}$ for all $i, j = 1, \dots, n$. In other words, the coefficients of the matrix are symmetric with respect to the diagonal.

4.1.1 : Example - مثال

The following matrices are symmetrical matrices: المصفوفات التالية مصفوفات متناظرة:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) و تكون المصفوفة A المربعة ضد تناظرية إذا كان:

A square matrix A is antisymmetric if we have:

$$A^T = -A,$$

أو إذا كان $a_{ij} = -a_{ji}$ من أجل كل $i, j = 1, \ldots, n$.

or if $a_{ij} = -a_{ji}$ for all $i, j = 1, \ldots, n$.

5.1.1 : Example - مثال

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -4 & 1 & -3 \\ -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.1.1 تساوي مصفوفات Equal matrices

ليكن n و p عددان طبيعيان غير معدومين. ولتكن المصفوفتين A و B من نفس الصنف $n \times p$.

Let n and p be non-null natural numbers and let the matrices A and B be of the same class $n \times p$.

3.1.1 : Definition - تعريف

نقول أن المصفوفتين A و B متساويتين إذا كانت العناصر المتناظرة فيهما متساوية ونكتب:

We say that the two matrices A and B are equal if their corresponding elements are equal *and we write:*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \forall i,j : a_{ij}=b_{ij}$$

6.1.1 : Example - مثال

لتكن المصفوفتين A و B حيث

Let the two matrices be A and B where

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & \pi \\ 2i & 7 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

نقول أن A تساوي B إذا كان

We say that A is equal to B if

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & \pi \\ 2i & 7 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}=2, \quad a_{12}=\sqrt{3}, \quad a_{13}=\pi, \\ a_{21}=2i, \quad a_{22}=7, \quad a_{23}=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

2.1.1 : Proposition - قضية

المصفوفتان $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ من الصنف $n{\times}p$ متساويتان إذا وفقط إذا كان $a_{ij}=b_{ij}$ من أجل كل i,j.

The two matrices $A=(a_{ij})$ and $B=(b_{ij})$ of class $n{\times}p$ are equal if and only if $a_{ij}=b_{ij}$ for each i,j.

2.1 حساب على المصفوفات *Calculation on matrices*

1.2.1 جداء مصفوفة بسلمي Product of a matrix by a scalar

3.2.1 : Proposition - قضية

إذا كان لدينا المصفوفة $A=(a_{ij})$ و العدد الحقيقي أو السلمي $\lambda \in \mathbb{R}$، نعرف λA بالمصفوفة $C=(c_{ij})$ حيث $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ من أجل كل i,j.

If we have the matrix $A=(a_{ij})$ and the real or scalar $\lambda \in \mathbb{R}$, we define λA by the matrix $C=(c_{ij})$ where $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ for each i,j.

7.2.1 : Example - مثال

لتكن المصفوفة

Let the matrix

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

ومنه

then

$$-2\times A=\begin{pmatrix} -2\times\frac{1}{2} & -2\times 1 \\ -2\times 0 & -2\times(-\frac{3}{4}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

2.2.1 جمع المصفوفات Matrices addition

4.2.1 : Proposition - قضية

إذا كان لدينا $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ مصفوفتين $n\times p$ نعرف مجموع المصفوفتين $A+B$ هو المصفوفة $C=(c_{ij})$ من الصنف $n\times p$ حيث $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ من أجل كل i,j.

If we have $A=(a_{ij})$ and $B=(b_{ij})$ two matrices $n\times p$ we define the sum of the two matrices denoted by $A+B$ is the matrix $C=(c_{ij})$ of class $n\times p$ where $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ for each i,j.

8.2.1 : Example - مثال

مجموع مصفوفتان من الصنف 2×3 :

The sum of two matrices of class 2×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 0-1 & -1-2 \\ 2-3 & 1-1 & 4+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

5.2.1 : Proposition - قضية

لتكن A، B و C ثلاث مصفوفات من المجموعة $M_{n,p}(\mathbb{K})$، و ليكن $\alpha \in \mathbb{K}$ و $\beta \in \mathbb{K}$ سلميين.

Let A, B and C be three matrices of the set $M_{n,p}(\mathbb{K})$, and let $\alpha \in \mathbb{K}$ and $\beta \in \mathbb{K}$ be a scalars.

1) الجمع تبديلي: *The addition is commutative:*

$$A + B = B + A,$$

2) الجمع تجميعي: *The addition is associative:*

$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$

3) المصفوفة المعدومة هي العنصر الحيادي بالنسبة للجمع في مجموعة المصفوفات:

The null matrix is the neutral element with respect to addition in the set of matrices:

$$A + 0 = A,$$

4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$

5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$

9.2.1 : Example - مثال

لتكن *Let*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{then} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

لكن إذا كان: *But, if:*

$$C = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

فإن $A + C$ غير معرف *$A + C$ is undefined.*

3.2.1 جداء المصفوفات Product of matrices

6.2.1 : Proposition - قضية

لتكن $A=(a_{ij})$ من الصنف $n\times p$ و $B=(b_{jk})$ من الصنف $p\times q$ نعرف الجداء $A\times B$ (الذي نرمز له أيضا بالرمز AB) المصفوفة $C=(c_{ik})$ المعرفة كما يلي:

Let $A=(a_{ij})$ be of class $n\times p$ and $B=(b_{jk})$ be of class $p\times q$ we define the product $A\times B$ (which is also denoted by AB) of the matrix $C=(c_{ik})$ knowledge as follows:

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk},\quad \forall i,k:\ 1\le i\le n \ \text{ and } \ 1\le k\le q.$$

يمكننا كتابة المعامل بطريقة أكثر تحليلا وهي:

We can write the coefficient in a more analytical way:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}+\cdots+a_{ip}b_{pj}.$$

1.2.1 : Remark - ملاحظة

يكون الجداء معرف فقط إذا كان عدد الأعمدة في A يساوي عدد الأسطر في B. لهذا جداء المصفوفات بصفة عامة ليس تبديلي.

A product is defined only if the number of columns in A equals the number of rows in B. This is why the multiplication of matrices is generally not commutative.

10.2.1 : Example - مثال

لتكن   *Let*

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

نبدأ أولاً الجداء بشكل صحيح : صنف المصفوفة التي تم الحصول عليها هو 2×2.

First we multiply correctly: the class of the obtained matrix is 2×2.

ثم نحسب كل من المعاملات ، بدءا من المعامل الأول

Then we calculate each of the coefficients, starting with the first one

$$c_{11} = 1\times 1 \ + \ 2\times(-1) \ + \ 3\times 1 = 2$$

then the rest ثم البقية

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 \\ \color{red}{-1} & 1 \\ \color{red}{1} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \color{blue}{2} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

11.2.1 : Example - مثال

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & c_{12} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{matrix}$$

We have: لدينا إذا:

$$c_{12} = 1\times 1 + 2\times 2 - 1\times 3 = 2.$$

بنفس الطريقة مع باقي عناصر المصفوفة نتحصل على :

in the same way with the rest of the matrix elements, we get:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

يمكن أن يكون حاصل ضرب مصفوفتين غير معدومتين هو صفر. بمعنى آخر ، يمكن أن يكون لدينا $A \neq 0$ **و** $B \neq 0$ **لكن** $AB = 0$.

The product of two non-null matrices can be zero. In other words, we could have $A \neq 0$ and $B \neq 0$ but $AB = 0$.

12.2.1 : Example - مثال

Let لتكن

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad so \quad AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

2.2.1 : Remark - ملاحظة

$AB = AC$ لا يعني $B = C$. يمكن الحصول $AB = AC$ و $B \neq C$.

$AB = AC$ does not mean $B = C$. $AB = AC$ and $B \neq C$ can be obtained.

13.2.1 : Example - مثال

Let لتكن

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 4\end{pmatrix} \quad so \quad AB=AC=\begin{pmatrix}-5 & -4\\ 15 & 12\end{pmatrix}.$$

Properties خواص

7.2.1 : Proposition - قضية

.

1) الجداء تجميعي: *The product is associative:*

$$A(BC)=(AB)C.$$

2) الجداء توزيعي على الجمع: *The product is distributive on addition:*

$$A(B+C)=AB+AC \quad and \quad (B+C)A=BA+CA$$

3)

$$A\cdot 0=0 \quad and \quad 0\cdot A=0.$$

4.2.1 منقول مصفوفة Transposed matrix

4.2.1 : Definition - تعريف

هي مصفوفة مشتقة من مصفوفة معلومة بجعل أسطرها أعمدة وأعمدتها أسطر أي تبديل الأسطر بالأعمدة والأعمدة بالأسطر بالطريقة التالية :

It is a matrix derived from a known matrix by making its lines into columns and its columns as lines, i.e. replacing lines with columns and columns with lines in the following way:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & b_{21} \\ a_{12} & b_{22} \\ a_{13} & b_{23} \end{pmatrix},$$

ونرمز لمنقول مصفوفة A بالرمز A^T.

and we denote the A matrix transpose by A^T.

3.2.1 : Remark - ملاحظة

منقول مصفوفة من الصنف $n \times p$ ينتج مصفوفة جديدة من الصنف $p \times n$.

The transpose of a matrix of class $n \times p$ produces a new matrix of class $p \times n$.

14.2.1 : Example - مثال

لدينا

We have

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Properties خواص

1.2.1 : Theorem - نظرية

- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
- $(A^T)^T = A$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- إذا كانت A عكوسة فإن A^T عكوسة أيضا ولدينا:

If A is invertible, then A^T is also invertible and we have:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

3.1 المصفوفات المربعة *Square matrices*

المصفوفات التي سوف ندرسها فيما يأتي هي مصفوفات مربعة من $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

The matrices we will study in the following are square matrices of $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1.3.1 أثر مصفوفة Matrix trace

في حالة مصفوفة مربعة من الصنف $n \times n$، تسمى العناصر $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ العناصر القطرية.

In the case of a square matrix of type $n \times n$, the elements $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ are called diagonal elements.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5.3.1 : Definition - تعريف

أثر المصفوفة A هو حاصل جمع العناصر القطرية للمصفوفة A. بعبارات أخرى:

The trace of the matrix A is the sum of the diagonal elements of the matrix A. in other words:

$$\boxed{\boldsymbol{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}$$

15.3.1 : Example - مثال

- إذا كان لدينا   *If we have*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

فإن   *then*

$$\boldsymbol{tr}(A) = 2 + 5 = 7.$$

- من أجل   *for*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \text{ then } \boldsymbol{tr}(B) = 1 + 2 - 10 = -7.$$

Properties خواص

2.3.1 : Theorem - نظرية

لتكن A و B مصفوفتين من الصنف $n\times n$. ومنه :

Let A and B be matrix of class $n\times n$. Including:

- $\boldsymbol{tr}(A+B) = \boldsymbol{tr}(A) + \boldsymbol{tr}(B)$،
- $\boldsymbol{tr}(A^T) = \boldsymbol{tr}(A)$،

- $\boldsymbol{tr}(AB) = \boldsymbol{tr}(BA)$،
- من أجل كل $\alpha \in \mathbb{K}$، *for every $\alpha \in \mathbb{K}$,*

$$\boldsymbol{tr}(\alpha A) = \alpha \boldsymbol{tr}(A)$$

2.3.1 محدد مصفوفة مربعة Square matrix determinant

محدِّد مصفوفة مربعة هي قيمة عددية تُعطينا معلومات موجزة عن المصفوفة، مثل إذا ما كانت قابلة للعكس، ومن المُفيد أن نعرف هذه المعلومات قبل محاولة إجراء أيِّ عملية جبرية تتضمّن المصفوفة. حيث نفضِّل دائما تقليل عدد العمليات الحسابية التي نحتاجها لتحقيق ذلك.

The determinant of a square matrix is a numerical value that gives brief information about the matrix, such as whether it is invertible. It is useful to know this information before attempting to perform any algebraic operation involving the matrix. We always prefer to reduce the number of mathematical operations that we need to achieve this.

فيما يلي، نعتبر المصفوفات ذات المعاملات في حقل تبديلي $\mathbb{K}$، يمكن أن يكون $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ أو $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. وسوف نشرح كيفية حساب محدد المصفوفة بأبعاد صغيرة.

In the following, we consider matrices with coefficients in a commutative field $\mathbb{K}$, which can be $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. We will explain how to calculate the determinant of a matrix with small dimensions.

6.3.1 : Definition - تعريف

لتكن المصفوفة المربعة A من $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ حيث

Let the square matrix A of $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ where

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

نسمي محدد المصفوفة A العدد من $\mathbb{K}$ الذي نرمز له بالرمز $\det(A)$ او $|A|$ و نكتب:

We call the number in $\mathbb{K}$ which we denote by $\det(A)$ or $|A|$ with the determinant of the matrix A

and write:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

سوف نُوَضِّح عدة خواص أساسية للمحددات. في كل مرة سنقدم توضيحات بسيطة لكل مفهومٍ جديد، عند حساب قيمة محدد لمصفوفة 4×4 أو أعلى من ذلك نكون بحاجة إلى إجراء عدد من العمليات الحسابية المطلوبة. ومن ثَم، سنكتفِي فقط باستخدام مصفوفات من الرتبة 2×2 أو 3×3. وقبل البدء، سنراجع باختصار كيفية حساب قِيَم محددات هذين النوعين من المصفوفات، بدءا بالمصفوفات من الرتبة 2×2 .

We will demonstrate several key properties of determinants. Each time we will give simple explanations for each new concept, when calculating the value of the determinant of 4×4 or higher we need to perform a number of required calculations. So we'll just use 2×2 or 3×3 matrices. Before we get started, we'll briefly review how to compute the values of the determinants of these two types of matrices, starting with 2×2 .

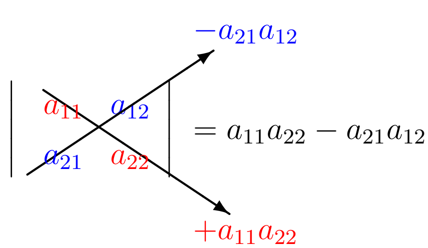
Determinant from dimension 2 and 3 محدد من البعد 2 و 3

في البعد 2 ، من السهل جدا حساب المحدد حيث تحسَب قيمة محدد المصفوفة من الرتبة 2×2 على النحو الآتي:

In dimension 2, it is very easy to compute the determinant as the value of the determinant of the matrix of order 2×2 is computed as follows:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

More clearly, the process is as follows: **بصورة أوضح تتم العملية بالشكل التالي:**



على عكس المصفوفة من الرتبة 2×2، فعند حساب قيمة محدد مصفوفة من رتبة أعلى، يُوجد أكثر من خيار لمتابعة العملية الحسابية.

Unlike the 2×2 matrix, when calculating the determinant of a higher-order matrix, there is more than one option to proceed with the calculation.

لتكن $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ مصفوفة 3×3:

Let $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ be a $3 matrix \times 3$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

تكون صيغة المحدد كالآتي:

The formula for the determinant is as follows:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

هناك طريقة أخرى سهلة، وهي طريقة ساروس والتي لا تصلح إلا للمصفوفات من الرتبة الثالثة فقط:

There is another easy method, which is Saros's method, which only works for 3rd order matrices:

نقوم بنسخ أول عمودين على يمين المصفوفة (الأعمدة الحمراء والزرقاء)، ثم نجمع حاصل ضرب ثلاثة حدود بتجميعها حسب الاتجاه للقطر النازل (إلى اليسار)، ثم نطرح حاصل ضرب ثلاثة حدود مجمعة حسب اتجاه القطر الصاعد (يمين).

We copy the first two columns to the right of the matrix (the red and blue columns), then add the product of three terms by grouping them by the direction of the descending diagonal (left), then subtract the product of the three terms grouped by the direction of the upward diagonal (right).

$$\begin{array}{|ccc|cc} & & & - \quad - & - \\ {\color{red}a_{11}} & {\color{blue}a_{12}} & a_{13} & {\color{red}a_{11}} & {\color{blue}a_{12}} \\ {\color{red}a_{21}} & {\color{blue}a_{22}} & a_{23} & {\color{red}a_{21}} & {\color{blue}a_{22}} \\ {\color{red}a_{31}} & {\color{blue}a_{32}} & a_{33} & {\color{red}a_{31}} & {\color{blue}a_{32}} \\ & & & + \quad + & + \end{array}$$

16.3.1 : Example - مثال

Let's calculate the determinant of the matrix لنحسب محدد المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

.

According to the Sarros method: بحسب طريقة ساروس:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det A = {} & 2\times(-1)\times 1 + 1\times 3\times 3 + 0\times 1\times 2 \\ & - 3\times(-1)\times 0 - 2\times 3\times 2 - 1\times 1\times 1 = -6. \end{aligned}$$

Properties خواص

3.3.1 : Theorem - نظرية

لتكن A و B مصفوفتين من الصنف $n\times n$. ومنه :

Let A and B be a two matrices of class n×n. Then:

- $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$،
- $\det(A^T) = \det(A)$،

- $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$،
- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
- من أجل كل $\alpha \in \mathbb{K}$، for every $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$$

3.3.1 المصفوفات المتشابهة Similar matrices

7.3.1 : Definition - تعريف

لتكن A و B مصفوفتين من المجموعة $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. نقول أن المصفوفة B شبيهة للمصفوفة A إذا وجدت مصفوفة عكوسة $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ حيث:

Let A and B be matrices of the set $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. We say that the matrix B is similar to the matrix A if there is an inverse matrix $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ where:

$$B = P^{-1}AP.$$

يمكن أن نبرهن بسهولة أن العلاقة التالية هي علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

We can easily prove that the following relation is an equivalence relation on the set $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}) : \quad A \mathscr{R} B \Longleftrightarrow A \text{ شبيهة بالمصفوفة Similar to } B$$

- **العلاقة إنعكاسية : المصفوفة A شبيهة لنفسها.**

Reflexive: the matrix A is similar to itself.

- **العلاقة تناظرية : إذا كانت A شبيهة للمصفوفة B فإن B شبيهة للمصفوفة A.**

Symmetric: if A is similar to the matrix B then B is similar to the matrix A.

- **العلاقة متعدية : إذا كانت A شبيهة للمصفوفة B و B شبيهة للمصفوفة C فإن A شبيهة للمصفوفة C.**

Transitive: if A is similar to the matrix B and B is similar to the matrix C then A is similar to the matrix C.

نقول حين إذ أن المصفوفتين A و B متشابهتين.

We say when since the two matrices A and B are similar.

4.3.1 : Remark - ملاحظة

مصفوفتان متشابهتان فهما تمثلان نفس التطبيق الخطي الذاتي (الأندومورفيزم)، لكن يتم التعبير عنها في أساسات مختلفة.

Two matrices are similar then they represent the same endomorphism, but are expressed in different bases.

4.3.1 مقلوب مصفوفة Matrix inverse

8.3.1 : Definition - تعريف

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n. إذا وجدة مصفوفة مربعة B من الدرجة n حيث:

Let A be a square matrix of degree n. If there is a square matrix B of degree n where:

$$AB = I \qquad \text{and} \qquad BA = I,$$

نقول أن A عكوسة. ونسمي B مقلوب المصفوفة A. ونرمز له بالرمز A^{-1}.

We say that A is invertible and we call B the inverse of the matrix A we denote it by A^{-1}.

5.3.1 : Remark - ملاحظة

يكفي في الواقع التحقق من شرط واحد فقط من الشروط التالية $AB = I$ أو $BA = I$.

In fact, it is sufficient to check only, the following conditions $AB = I$ or $BA = I$.

- بصفة عامة إذا كانت A عكوسة، من أجل كل $p \in \mathbb{N}$ نلاحظ :

In general, if A is inverse, for every $p \in \mathbb{N}$ we note:

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{\text{مرة } p \text{ time}}.$$

- مجموعة المصفوفات العكوسة من $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ يرمز له بالرمز $GL_n(\mathbb{K})$.

The set of inverse matrices $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ is denoted by $GL_n(\mathbb{K})$.

مقلوب مصفوفة باستعمال طريقة المقارنة Inverse of a matrix by comparison method

17.3.1 : Example - مثال

لِيكن

Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ندرس قابلية قلب المصفوفة A أي وجدانية المصفوفة

We study the invertibility of the matrix A, that is, the affectivity of the matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ذات المعاملات من $\mathbb{K}$ حيث $AB = I$ و $BA = I$. في حين $AB = I$ تكافئ :

with coefficients in $\mathbb{K}$ where $AB = I$ and $BA = I$. while $AB = I$ is equivalent to :

$$AB = I \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

هذه المساواة تعادل الجملة :

This equality is equivalent to the system:

$$\begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}$$

حلها هو : $a = 1$، $b = -\frac{2}{3}$، $c = 0$، $d = \frac{1}{3}$. ومنه المصفوفة

Its solution is: $a = 1$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$. Then, the matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

لإثبات أنها مناسبة، من الضروري أيضا التحقق من المساواة $BA = I$. ومنه المصفوفة A عكوسة ومقلوبها

To prove that they are suitable, it is also necessary to check the equality $BA = I$. The matrix A

is invertible and his inverse is

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

مقلوب مصفوفة باستعمال طريقة غـوص Inverse of a matrix by Gauss method

تتمثل هذه الطريقة من تنفيذ عدة عمليات أولية على أسطر المصفوفة A حتى تحويلها إلى مصفوفة الوحدة I. حيث يتم تنفيذ نفس العمليات الأولية في وقت واحد بدءا من المصفوفة I. ثم ننتهي بمصفوفة قيمتها A^{-1}. سنوضح ذلك بأمثلة سهلة للفهم أكثر.

This method consists in performing several preliminary operations on the lines of the matrix A until it is converted into the unit matrix I. Where the same initial operations are performed simultaneously starting with the matrix I. Then we end up with a matrix A^{-1}. We will explain this with easy-to-understand examples.

عمليا ، نقوم بكلتا العمليتين في نفس الوقت من خلال اعتماد الترتيب التالي: بجانب المصفوفة A التي نريد قلبها ، نضيف مصفوفة الوحدة لتشكيل المصفوفة المعززة $(A \mid I)$.

Practically, we do both operations at the same time by adopting the following order: next to the matrix A that we want to invert, we add the unity matrix to form the augmented matrix $(A \mid I)$.

على أسطر هذه المصفوفة، يتم تنفيذ العمليات الأولية حتى الحصول على الجدول $(I \mid B)$. فنحصل على $B = A^{-1}$.

On the lines of this matrix, the initial operations are performed until the table $(I \mid B)$ is obtained. We get $B = A^{-1}$.

سوف نتبع العمليات التالية على الأسطر :

We will follow the following operations on the lines:

1) **يمكننا ضرب أي سطر في عدد حقيقي غير معدوم (أو أي عنصر من $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).**

We can multiply any line by a non-zero real number (or any element of $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).

$$L_i \leftarrow \lambda L_i, \lambda \neq 0$$

2) **يمكننا أن نضيف إلى السطر L_i مضاعف من مضاعفات سطر آخر L_j.**

We can add to line L_i a multiple of another line's L_j.

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j, \lambda \in \mathbb{K} : (j \neq i)$$

3) يمكننا مبادلة سطرين.

We can exchange two lines.

$$L_i \leftrightarrow L_j.$$

6.3.1 : Remark - ملاحظة

تذكرأن كل ما تفعله على الجانب الأيسر من المصفوفة المعززة، عليك القيام به في الجانب الأيمن أيضا.

Remember that whatever you do on the left side of the augmented matrix, you have to do on the right side as well.

18.3.1 : Example - مثال

نحسب مقلوب المصفوفة التالية:

We calculate the inverse of the following matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

المصفوفة المعززة بأسطر مرقمة:

The augmented matrix with numbered lines:

$$(A \mid I) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

نطبق طريقة غوص لجعل 0 يظهر في العمود الأول، أولاً في السطر الثاني بواسطة العملية الأولية $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ مما يؤدي إلى المصفوفة المعززة:

We apply a Gauss method to make 0 appear in the first column, first in the second line by the initial operation $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ which leads to the augmented matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ \\ \end{array}$$

ثم 0 في العمود الأول، و في السطر الثالث ، بالتحويل $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

Then 0 *in the first column, and in the third line, by transforming* $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ *:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}$$

نضرب السطر L_2 في العدد $-1/8$ كي نحصل على 1 :

We multiply the line L_2 *by the number* $-1/8$ *to get* 1 *:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2}$$

نستمر في العملية كي نجعل 0 يظهر في كل الأماكن تحت القطر، حتى ننتهي من الجزء الأول من طريقة غوص:

We continue the process to make 0 *appear everywhere under the diagonal, until we've finished with the first part of the sink method:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}$$

then ثم

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow 2L_3}$$

كل ما تبقى هو الجزء الثاني من طريقة غوص و هو الصعود لجعل الأصفار تظهر فوق القطر:

All that's left is the second part of the Gauss method which is to go up to make the zeros appear above the diagonal:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8} L_3}$$

ثم *then*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3}$$

وبالتالي، فإن مقلوب المصفوفة A هو المصفوفة التي تم الحصول عليها على اليمين وبعد اخراج المقدار $\frac{1}{4}$ كعامل مشترك نتحصل على:

So, the inverse of the matrix A is the matrix obtained on the right and after taking out the expression $\frac{1}{4}$ as a common factor we get:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

وأخيرا، كي نطمئن على الحسابات، يكفي أن نتحقق من أن $A \times A^{-1} = I$.

Finally, to be sure of the calculations, it is enough to check that $A \times A^{-1} = I$.

مقلوب مصفوفة باستعمال مرافق المصفوفة Inverse of a matrix by adjoint matrix

9.3.1 : Definition - تعريف

لتكن المصفوفة A حيث: *Let the matrix A where:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

نقوم بإنشاء المصفوفة A_{ij} بحذف العمود j الملون باللون الأحمر وحذف السطر i الملون باللون الأزرق من المصفوفة السابقة، فنحصل على مصفوفة من الرتبة $n-1$.

We create the matrix A_{ij} by deleting the column j colored in red and deleting the line i colored *in blue from the previous matrix, so we get a matrix of order $n-1$.*

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

نسمي مصفوفة مرافقة للمصفوفة A ونرمز لها بالرمز A^* المصفوفة

We call the adjoint matrix of the matrix A and we denote it by A^* the matrix

$$A^*=\left((-1)^{i+j}\det(A_{ij})\right)_{i,j\le n}=\begin{pmatrix} +\det(A_{11}) & -\det(A_{12}) & +\det(A_{13}) & -\det(A_{14}) & \cdots \\ -\det(A_{21}) & +\det(A_{22}) & -\det(A_{23}) & +\det(A_{24}) & \cdots \\ +\det(A_{31}) & -\det(A_{32}) & +\det(A_{33}) & -\det(A_{34}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

19.3.1 : Example - مثال

Let the matrix be A where:　　　　لتكن المصفوفة A حيث:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

From which the adjoint matrix is:　　　　ومنه المصفوفة المرافقة هي:

$$A^*=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

4.3.1 : Theorem - نظرية

تكون المصفوفة المربعة A عكوسة أو قابلة للقلب إذا وفقط إذا كانت قيمة $\det(A) \neq 0$. و إذا كانت المصفوفة A عكوسة، فإن

The square matrix A is invertible if and only if $\det(A) \neq 0$.

If the matrix A is inverse, then

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^T .$$

20.3.1 : Example - مثال

لتكن المصفوفة A من المثال السابق:

Let the matrix A from the previous example be:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفتها المرافقة هي:

Its adjoint matrix is:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

ومنه منقول المصفوفة هو:

Its transpose matrix is:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

في الأخير مقلوب المصفوفة A هو:

Finally the inverse of the matrix A is:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^T = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

4.1 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 1*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

Let لتكن

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

and و

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

$A)$ أحسب كل المجاميع الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات.

Calculate all possible sums of two of these matrices.

$B)$ أحسب كل الجداءات الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات.

Calculate all possible products of two of these matrices.

$C)$ أحسب $3A + 2E$ و $5B + 4EA^T$.

Calculate $3A + 2E$ *and* $5B + 4EA^T$.

$D)$ أوجد α حيث $A - \alpha E$ المصفوفة المعدومة.

Find α *where* $A - \alpha E$ *is the null matrix.*

Solution - الحـــل

$A)$ المجاميع الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات هي

The possible sums of two of these matrices are

$$A + E = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -3 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

باقي المجاميع غير ممكنة.

Other combinations are not possible.

B) **الجداءات غير الممكنة لمصفوفتين من هذه المصفوفات هي:**

The non-possible products of two of these matrices are:

$$AB, AC, CA, DA, AE, EA, CB, BD, DB, EB, CD, DC, CE, EC, DE$$

و الجداءات الممكنة هي:

The possible products are:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ -13 & -3 \\ -20 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AD = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$BE = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & 20 \\ -15 & 10 \\ -11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$ED = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

C)

$$3A + 2E = \begin{pmatrix} -19 & 10 \\ -6 & -3 \\ -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5B + 4EA^T = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -13 \\ 94 & 15 & -7 \\ 287 & -14 & -123 \end{pmatrix}.$$

$D)$ لا يوجد α حيث

There is no α where

$$A - \alpha E = \begin{pmatrix} -\alpha - 7 & 2 - 2\alpha \\ 3\alpha & -1 \\ 8\alpha + 1 & -6\alpha - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

لأن $0 \neq -1$.

because $0 \neq -1$.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

.

1) أحسب الجدائين AB و BA عندما يكون معرف، في كل من الحالات التالية:

Calculate the product AB and BA when is defined, in each of the following cases:

$$a)\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) أحسب منقول المصفوفات السابقة.

Calculate the transpose of the previous matrices.

Solution : الحــل

1) **حساب الجداءات الممكنة:**

Calculation of possible product:

- **نظرا لأن** A **و** B **مصفوفتان مربعتان من نفس الرتبة، فإن الجدائين** AB **و** BA **ممكنان. و نجد:**

Since A and B are square matrices of the same order, the product AB and BA are possible and we find:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

على وجه الخصوص، $AB = BA = 0$ **بينما لا المصفوفة** A **ولا** B **معدومة.**

In particular, $AB = BA = 0$ while neither the matrix A nor B is zero.

- **الجداء** AB **غير معرف لأن** A **يحتوي على ثلاثة أعمدة و** B **على سطرين. لذا نجد**

The product of AB is undefined because A has three columns and B has two rows. So we find

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

- **الجداء** BA **غير معرف لكن من ناحية أخرى، لدينا**

The product BA is undefined but on the other hand, we have

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) **حساب منقول المصفوفات السابقة:**

Calculation of transpose of the past matrices:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = B \quad (a$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b$$

$$.A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (c$$

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

لتكن $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ المصفوفة المعرفة بـ:

Let $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ be the matrix defined by:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

قارن بين المصفوفتين $(A+B)^2$ و $A^2+2AB+B^2$. ثم قارن بين المصفوفتين $(A+B)^2$ و $A^2+AB+BA+B^2$.

Compare the two matrices $(A+B)^2$ with $A^2+2AB+B^2$. Then compare the two matrices $(A+B)^2$ with $A^2+AB+BA+B^2$.

Solution : الحـــل

نجري الحسابات المختلفة فنجد

We make various calculations and find out

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

and   و

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

وبالتالي، نلاحظ أن $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ **خطأ بالنسبة للمصفوفات. من ناحية أخرى، المساواة** $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$ **التي أثبتناها بالتوزيع المزدوج، صحيحة لجميع المصفوفات المربعة** A **و** B.

So we can see that $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ is false for matrices. On the other hand, the equality $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$, which we prove by double distribution, is true for all square matrices A and B.

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

لتكن

Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

أوجد كل المصفوفات

Find all matrices

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

التي يمكنها أن تتبادل مع A، يعني $AB = BA$.

which can be exchanged with A, i.e. $AB = BA$.

Solution : الحـــل

لدينا

We have

$$AB = \begin{pmatrix} c+e & d+f \\ e & f \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} c & c+d \\ e & e+f \end{pmatrix}.$$

لأننا فرضنا $AB = BA$ **نتحصل على الجملة :**

because we assume $AB = BA$, we get the system:

$$\begin{cases} c+e &= c \\ d+f &= c+d \\ f &= e+f \end{cases}$$

بحل الجملة نجد $e = 0$ **و** $c = f$. **ومنه كل المصفوفات** B **فهي من الشكل :**

Solving the system, we find $e = 0$ and $c = f$ then, all the matrices B are of the form:

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

لتكن a و b أعداد حقيقية غير معدومة و المصفوفة

Let aandb be non-zero real numbers and the matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

أوجد كل المصفوفات $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي يمكنها أن تتبادل مع A، أي $AB = BA$.

Find all the matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ that can interchange with A, i.e. $AB = BA$.

Solution : الحــل

Let　　　　لتكن

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

then, we have　　　　ومنه لدينا

$$AB = \begin{pmatrix} ac+be & ad+bf \\ ae & af \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} ac & bc+ad \\ ae & be+af \end{pmatrix}.$$

لأننا فرضنا $AB = BA$ نتحصل على الجملة :

because we assume $AB = BA$, we get the system:

$$\begin{cases} ac+be & = & ac \\ ad+bf & = & bc+ad \\ af & = & be+af \end{cases}$$

بحل الجملة نجد $e = 0$ و $c = f$. ومنه كل المصفوفات B فهي من الشكل :

Solving the system, we find $e = 0$ and $c = f$, and then, all the matrices B are at the form:

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

أجد A و B من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ حيث : $AB = 0$ و $BA \neq 0$.

Find A and B from $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ where: $AB = 0$ and $BA \neq 0$.

Solution : الحـــل

مثلا من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $a \neq 0$ و $b \neq 0$ فإن:

For example, for each non-zero real number $a \neq 0$ and $b \neq 0$, then:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note that — **نلاحظ أن**

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and — و

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

Let the matrix — لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

1) هل توجد مصفوفة $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ حيث $AB = I_3$؟ إن كان الجواب بنعم، هات صيغة المصفوفة B.
Is there a matrix $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ where $AB = I_3$? If yes, give the matrix formula of B.

2) هل توجد مصفوفة $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ حيث $CA = I_2$؟ إن كان الجواب بنعم، هات صيغة المصفوفة C.

Is there a matrix $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ where $CA = I_2$? If yes, give the matrix formula of C.

Solution : الحـــل

لتكن $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ تكتب على الشكل التالي:

Let $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ be written in the following form:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

So the product of AB is equal to 		ومنه الجداء AB يساوي

$$AB = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix}.$$

إذا كان لدينا $AB = I_3$، فسنحصل على وجه الخصوص على $d = 1$ و $a = 0$ و $a + d = 0$. وهي مستحيلة.

In particular, if we have $AB = I_3$, we get $d = 1$, $a = 0$, and $a + d = 0$. It is impossible.

لتكن $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ تكتب على الشكل التالي:

Let $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ be written in the following form:

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

So the product of CA is equal to 		ومنه الجداء CA يساوي:

$$CA = \begin{pmatrix} b+c & a+c \\ e+f & d+f \end{pmatrix}.$$

لدينا $CA = I_2$ إذا وفقط إذا كان:

We have $CA = I_2$ if and only if:

$$\begin{cases} b+c &= 1 \\ a+c &= 0 \\ e+f &= 0 \\ d+f &= 1 \end{cases}$$

حل الجملة هو:

the solution of the system is

$$\begin{cases} a &= -c \\ b &= 1-c \\ e &= -f \\ d &= 1-f \end{cases}$$

لذلك يمكن أن نجد مصفوفة مناسبة C، على سبيل المثال:

So we can find a suitable matrix C, for example:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercise N°– 8 – تمرين رقم

لتكن المصفوفات التالية :

Let the following matrices as:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) أحسب A^2، A^3. ثم إستنتج من A^n من أجل كل $n \geq 1$.

Calculate A^2, A^3. Then deduce from A^n for every $n \geq 1$.

2) أجب على نفس السؤال من أجل المصفوفة B.

Answer the same question for the matrix B.

Solution : الحـــل

سنبدأ بحساب الحدود الأولى لـ A^n لمحاولة تخمين الصيغة النهائية. لدينا

We'll start by calculating the first terms of A^n to try to guess the final formula. we've got

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

ثم نثبت بالتراجع أن من أجل $n \geq 1$:

Then we prove by induction that for $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

إن الإثبات بالتراجع بسيط للغاية، ويعتمد ببساطة على $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$

The induction proof is very simple, it simply depends on $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$

نفعل الشيء نفسه بالنسبة لـ B:

We do the same for B:

$$B^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 8\end{pmatrix}.$$

ثم نثبت بالتراجع أن من أجل $n\geq 1$:

Then we prove by induction that for $n\geq 1$:

$$B^n=\begin{pmatrix}1 & 2^n-1\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}.$$

Exercise N°– 9 – تمرين رقم

أحسب بإستعمال طريقة غوص ثم طريقة المصفوفة المرافقة، مقلوب المصفوفة

Calculate using the submerged method and then the conjugate matrix method, the inverse of the matrix

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Solution - الحــل

1) حساب مقلوب المصفوفة A باستعمال طريقة غوص، المصفوفة المعززة:

Calculating the inverse of the matrix A using the Gauss method. The augmented matrix is:

$$(A\mid I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}L_1\\ L_2\\ L_3\end{array}$$

نجعل 0 يظهر في العمود الأول:

We make 0 appear in the first column:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_2-2L_1\end{array}$$

then ثم

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow \frac{-1}{4} L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \end{array}$$

and finally و في الأخير

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

وبالتالي، فإن مقلوب المصفوفة A هو المصفوفة التي تم الحصول عليها على اليمين :

Thus, the inverse matrix of A is the matrix obtained on the right:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) نستعمل طريقة المصفوفة المرافقة: نحسب المحدد

We use the adjoint matrix method: we calculate the determinant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = -4$$

We calculate the adjoint matrix نحسب المصفوفة المرافقة

$$A^*=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\\ \\ -\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\\ \\ +\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{pmatrix}$$

Calculate the transpose of the adjoint matrix

نحسب منقول المصفوفة المرافقة

$$(A^*)^T=\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{pmatrix}$$

نطبق النظرية لحساب المقلوب، نجد:

Applying the theorem to calculate the inverse, we find:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}(A^*)^T=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1&3\\-1&3&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}$$

Exercise N°– 10 – تمرين رقم

Prove that

أثبت أن

$$D=\begin{vmatrix}1+a&a&a\\b&1+b&b\\c&c&1+c\end{vmatrix}=1+a+b+c.$$

Solution : الحـــل

نجمع كل الأسطر ونضعها في السطر الأول. نحصل على سطر يتكون من $1+a+b+c$ يمكننا استخلاصها من المحدد، أي نحصل علي:

We sum all the lines and put them on the first line. We get a line consisting of $1 + a + b + c$ that we can extract from the determinant, that is we get:

$$D = (1 + a + b + c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1 + b & b \\ c & c & 1 + c \end{vmatrix}.$$

ثم نقوم بالتحويل التالي على الأعمدة: $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$، $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ نحصل على:

Then we do the following transformation on the columns: $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ we get:

$$D = (1 + a + b + c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

نحصل على محدد مصفوفة مثلثية سفلية، عناصر قطرها 1. ومنه المحدد

We get the determinant of the lower triangular matrix, elements of diagonal 1. Then de determinant is:

$$D = 1 + a + b + c.$$

الفصل الثاني

$Matrix\ diagonalization$ تقطير مصفوفة

فهرس الفصل

تقطير مصفوفة هو عملية أساسية في مجموعة المصفوفات. في هذا الفصل سنقوم بتحديد الشروط اللازمة كي تكون المصفوفة قابلة للتقطير. لهذا سنأخذ بعين الإعتبار مفاهيم الفصل السابق للتطبيقات الخطية.

Matrix diagonalization is a basic process in Matrices set. In this chapter we will define the conditions necessary for the matrix to be diagonalizable For this we will consider the concepts of the previous chapter for linear applications.

في هذا الفصل ، E هو فضاء شعاعي ذو بعد منته، على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$.

In this chapter, E is a finite-dimensional vector space on the commutative field $\mathbb{K}$.

1.2 القيم والأشعة الذاتية *Eigenvalues and eigenvectors*

لنبدأ بتحديد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لتطبيق خطي.

Let's start by defining the eigenvalues and eigenvectors of a linear application.

1.1.2 تعاريف Definitions

تذكير: $f : E \to E$ تشاكل داخلي (أندومورفيزم) إذا كان f تطبيق خطي من E في نفسه. بعبارة أخرى، من أجل كل $v \in E$ فإن $f(v) \in E$ و أيضا، من أجل كل $u, v \in E$ و كل $\alpha \in \mathbb{K}$:

Reminder: $f : E \to E$ is an endomorphism if f is a linear application of E in itself. In other words, for each $v \in E$ the $f(v) \in E$ and also, for each $u, v \in E$ and each $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad \text{and} \qquad f(\alpha v) = \alpha f(v)$$

1.1.2 : Definition - تعريف

لیكن $f : E \to E$ تشاكل داخلي.

Let $f : E \to E$ be an endomorphism.

1) نسمي $\lambda \in \mathbb{K}$ قيمة ذاتية للتشاكل داخلي f إذا وجد شعاع غير معدوم $v \in E$ حيث :
We call $\lambda \in \mathbb{K}$ an eigenvalue of the endomorphism f if there is a non-zero vector $v \in E$ where:

$$\boxed{f(v) = \lambda v.}$$

2) نسمي الشعاع v عندها الشعاع الذاتي للتطبيق الخطي f المرافق للقيمة الذاتية λ.
Then, we call the vector v the eigenvector of the linear application f according to the eigenvalue λ.

3) طيف التطبيق f هو مجموعة القيم الذاتية للتطبيق الخطي f. ونرمز له بالرمز : $Sp(f)$ (أو $Sp_{\mathbb{K}}(f)$

إذا خصصنا الحقل المعرف عليه الفضاء الشعاعي).

The spectrum of the application f is the set of eigenvalues of the linear application f. We denote it by: $Sp(f)$ (or $Sp_{\mathbb{K}}(f)$ if we specify the field defined by the vector space).

1.1.2 : Remark - ملاحظة

إذا كان v شعاع ذاتي فإن من أجل كل $\alpha \in \mathbb{K}^*$ فإن αv هو ايضا شعاع ذاتي.

If v is an eigenvector then for every $\alpha \in \mathbb{K}^*$ then αv is also an eigenvector.

تتوافق هذه التعريفات مع التعاريف الخاصة بالمصفوفات.

These definitions correspond to the special definitions of matrices.

2.1.2 : Definition - تعريف

لتكن $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. وليكن $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ تطبيق خطي معرف كما يلي:

Let $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ and $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ be a linear application defined as follows:

$$f(v) = Av$$

فإن القيم الذاتية و الأشعة الذاتية للتطبيق الخطي f هي نفسها للمصفوفة المرافقة A.

the eigenvalues and eigenvectors of the linear application f are the same as the associated matrix A.

لنبحث عن كتابة أخرى للعلاقة الخطية المتداخلة التي تحدد الأشعة الذاتية:

Let's look for another writing for the collinear defining the eigenvectors:

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda v &\iff f(v) - \lambda v = 0 \\ &\iff (f - \lambda id_E)(v) = 0 \\ &\iff v \in Ker(f - \lambda id_E) \end{aligned}$$

ومن هنا يأتي مصطلح الفضاء الشعاعي الذاتي.

Hence it comes the term Eigenvector space.

2.1.2 الفضاء الشعاعي الذاتي Eigen-vectorial space

3.1.2 : Definition - تعريف

لتكن f تشاكل ذاتي من E. وليكن $\lambda \in \mathbb{K}$. نسمي فضاء شعاعي جزئي ذاتي مرافق للقيم الذاتية λ الفضاء الشعاعي الجزئي الذي نرمز له بالرمز E_λ المعرف بـ :

Let f be an endomorphism of E and $\lambda \in \mathbb{K}$. We call the sub-eigen-vectorial space associated with the eigenvalues λ the sub-vector space which we denote by E_λ defined by :

$$\boxed{E_\lambda = Ker(f - \lambda id_E).}$$

و يمكن أن نرمز له بالرمز $E_\lambda(f)$ في حالة إظهار ترابطه مع التطبيق الخطي f. أي:

we can denote it by $E_\lambda(f)$ in the case of showing its correlation with the linear application f.

$$\boxed{E_\lambda = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}.}$$

Or in matrix form: أو بالصيغة المصفوفية :

$$\boxed{E_\lambda = \{v \in E \mid Av = \lambda v\}.}$$

2.1.2 : Remark - ملاحظة

Let E be the vector space of finite dimension. ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته.

1) إذا كانت λ قيمة ذاتية لـ f فإن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_λ ذو بعد $1 \geq$.
If λ is an eigenvalue of f then the eigen-sub vectorial space E_λ is of dimension ≥ 1.

2) الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_λ مستقر بالنسبة لـ f يعني: $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$. بصورة أوضح:
The eigen-sub vectorial space E_λ is stable with respect to f means: $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

$$v \in Ker(f - \lambda id_E) \implies f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) \implies f(v) \in Ker(f - \lambda id_E)$$

3.1.2 أمثلة Examples

1.1.2 : Example - مثال

Let $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ defined by لیكن $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ المعرف بـ

$$f(x,y,z)=\big(-2x-2y+2z,\quad -3x-y+3z,\quad -x+y+z\big).$$

1) لنكتب التطبيق الخطي f على الشكل المصفوفي أي $f(X)=AX$:
Let's write the linear application f in matrix form $f(X)=AX$:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad and \qquad A=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\-3&-1&3\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

2) نلاحظ أن إذا كان $v_1=(1,1,0)$ فإن $f(1,1,0)=(-4,-4,0)$ و يمكن كتابة أيضا $f(v_1)=-4v_1$. و بالتالي v_1 هو شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_1=-4$.
Note that, if $v_1=(1,1,0)$ then $f(1,1,0)=(-4,-4,0)$ and can also be written $f(v_1)=-4v_1$. So v_1 is an eigenvector to the associated eigenvalue $\lambda_1=-4$.

إذا فضلنا إجراء العمليات الحسابية باستخدام المصفوفات ، فإننا نعتبر v_1 كشعاع عمود ونحسب $Av_1=-4v_1$.
If we prefer to conduct the mathematical calculations using matrices, we take v_1 as a vector column and calculate $Av_1=-4v_1$.

3) $\lambda_2=2$ قيمة ذاتية. *$\lambda_2=2$ is an eigenvalue.*
لإثبات ذلك ، علينا إيجاد شعاع غير معدوم في $Ker(f-\lambda_2 Id_{\mathbb{R}^3})$ من أجل $\lambda_2=2$. لهذا نحسب $A-\lambda_2 I_3$:
To prove this, we need to find a non-zero vector in $Ker(f-\lambda_2 Id_{\mathbb{R}^3})$ for $\lambda_2=2$. For this we calculate $A-\lambda_2 I_3$:

$$A-2I_3=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\-3&-3&3\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

نجد $v_2=(0,1,1)$ ينتمي الى النواة $A-2I_3$ أي $(A-2I_3)v_2$ هو الشعاع المعدوم. وبعبارة أخرى، $v_2\in Ker(f-\lambda_2 Id_{\mathbb{R}^3})$، أي $f(v_2)-2v_2=0$ ومنه $f(v_2)=2v_2$. في الأخير: v_2 شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_2=2$.

We find that $v_2 = (0,1,1)$ belongs to the kernel $A - 2I_3$ ie $(A - 2I_3)v_2$ is the zero vector. In other words, $v_2 \in Ker(f - \lambda_2 Id_{\mathbb{R}^3})$. That is, $f(v_2) - 2v_2 = 0$, from which $f(v_2) = 2v_2$. Finally: v_2 is an eigenvector associated with the eigenvalue $\lambda_2 = 2$.

3) $\lambda_3 = 0$ قيمة ذاتية.

$\lambda_3 = 0$ is an eigenvalue.

بمكننا أن نفعل مثل ما ورد أعلاه ونجد أن $v_3 = (1,0,1)$ تحقق $f(v_3) = (0,0,0)$. وبالتالي $f(v_3) = 0 \cdot v_3$. في الأخير : v_3 شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_3 = 0$.

We can do like above and find that $v3 = (1,0,1)$ checks $f(v_3) = (0,0,0)$. So $f(v_3) = 0 \cdot v_3$. In the last: v_3 eigenvector concomitant to the eigenvalue $\lambda_3 = 0$.

4) وجدنا ثلاث قيم ذاتية، ولا نستطيع إيجاد اكثر من ذالك لأن المصفوفة A من الرتبة 3. نستنتج: $Sp(f) = \{-4, 0, 2\}$.

We found three eigenvalues, and we can't find more than that because the matrix A is of order 3. We conclude: $Sp(f) = \{-4, 0, 2\}$.

1.1.2 : Theorem - نظرية

ليكن f تشاكل ذاتي لـ E ذو بعد منته n. ولتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ قيم ذاتية مختلفة لـ f حيث $k \leq n$. ومنه مجموع الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ المرافق للقيم الذاتية $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ يكون مجموعا مباشرا.

Let f be an endomorphism of E with finite dimension n. Let $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ be different eigenvalues of f where $k \leq n$. From which the sum of the sub-eigen-vectorial spaces $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ associated with the eigenvalues is a direct sum.

نجد النتيجة التالية في حالة المصفوفات:

In the case of matrices, we find the following result:

1.1.2 : Corollary - نتيجة

لتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ قيم ذاتية مختلفة للتطبيق الخطي f و من أجل $1 \leq i \leq k$ ليكن v_i شعاع ذاتي مرافق للقيمة λ_i. فإن الأشعة v_i مستقلة خطيا.

Let $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ be different eigenvalues of linear application f and for $1 \leq i \leq k$ let v_i be an eigenvector of λ_i. The vectors v_i are linearly independent.

هذا يعني أن عدد القيم الذاتية يكون أقل من بعد الفضاء E.

This means that the number of eigenvalues is less than the space dimension of E.

2.1.2 : Example - مثال

من المثال السابق نأخذ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بـ

From the previous example we take $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ defined by

$$f(x, y, z) = \big(-2x - 2y + 2z, \quad -3x - y + 3z, \quad -x + y + z \big).$$

لقد وجدنا القيم الذاتية والأشعة الذاتية المرافقة لها التالية:

We found the following eigenvalues and their associated eigenvectors:

$$\lambda_1 = -4 \quad v_1 = (1, 1, 0), \quad \lambda_2 = 0 \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad \lambda_3 = 2 \quad v_3 = (0, 1, 1).$$

من النتيجة الأشعة (v_1, v_2, v_3) تشكل جملة مستقلة لـ $\mathbb{R}^3$ لكن ثلاث أشعة مستقلة خطيا من $\mathbb{R}^3$ فهي حتما تشكل أساس. ومنه: (v_1, v_2, v_3) تشكل أساس يسمى الأساس الذاتي لـ $\mathbb{R}^3$.

From the result the vectors (v_1, v_2, v_3) form an independent family of $\mathbb{R}^3$ but three linearly independent vectors of $\mathbb{R}^3$ they forms a basis. Then: (v_1, v_2, v_3) forms the basis called the eigen-basic of $\mathbb{R}^3$.

نستطيع أن نكتب أيضا :

We can also write:

$$\mathbb{R}^3 = E_{-4} \oplus E_0 \oplus E_2.$$

2.2 كثير الحدود المميز *Characteristic polynomial*

يساعد كثيرة الحدود المميزة في العثور على القيم الذاتية.

Characteristic polynomials help in finding the eigenvalues.

1.2.2 كثير الحدود المميز Characteristic polynomial

4.2.2 : Definition - تعريف

ليكن $f : E \to E$ تشاكل ذاتي على الفضاء E ذو البعد المنته n. لتكن $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة التطبيق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}$.

Let $f : E \to E$ be an endomorphism on the space E of finite dimension n. Let $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ be the matrix of the linear application f in the base $\mathcal{B}$.

نسمي كثير الحدود المميز لـ f هو نفسه كثير الحدود المميز للمصفوفة A ونكتب :

We call the characteristic polynomial of f the same as the characteristic polynomial of the matrix A and write:

$$\boxed{P_f(X) = P_A(X) = \det(A - XI_n).}$$

كثير الحدود المميز مستقل عن المصفوفة A (واختيار الأساس $\mathcal{B}$). وبالتالي إذا كانت B هي مصفوفة نفس التشاكل الداخلي f ولكن في أساس آخر $\mathcal{B}'$، فإنه يوجد $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ عكوسة حيث $B = P^{-1}AP$. ونكتب :

The characteristic polynomial is independent of the matrix A (and the choice of the base $\mathcal{B}$). So if B is another matrix of the endomorphism f but in another base $\mathcal{B}'$, then there is an inverse matrix $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ where $B = P^{-1}AP$. We write:

$$B - XI_n = P^{-1}(A - XI_n)P.$$

then ومنه

$$P_B(X) = \det(B - XI_n) = \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A - XI_n) \cdot \det(P) = \det(A - XI_n) = P_A(X).$$

i.e. بمعنى آخر.

$$P_B(X) = P_A(X).$$

2.2.2 تعيين القيم الذاتية Calculating eigenvalues

1.2.2 : Proposition - قضية

جذور كثير الحدود المميز تمثل القيم الذاتية له، ونكتب:

The roots of the characteristic polynomial represent its eigenvalues, and we write:

$$\boxed{f \text{ قيمة ذاتية لـ } \quad (\textit{eigen value of}) \quad \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad P_f(\lambda) = 0}$$

بصيغة أخرى: لتكن $f : E \to E$. و لتكن $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفته في الأساس $\mathcal{B}$. و $\lambda \in \mathbb{K}$.

In other words, let $f : E \to E$ and $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ the matrix in the base $\mathcal{B}$ and $\lambda \in \mathbb{K}$.

و منه :

Then

$$\boxed{f \text{ قيمة ذاتية لـ } \quad (\text{eigen value of}) \quad \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_n) = 0}$$

3.2.2 : Example - مثال

إذا كانت D مصفوفة قطرية حيث

If D is a diagonal matrix where

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

فإن

then

$$P_D(X) = (\lambda_1 - X) \cdots (\lambda_n - X)$$

ومنه القيم λ_i هي جذور كثير الحدود $P_D(X)$ وهي أيضا القيم الذاتية للمصفوفة D.

The values λ_i are the roots of the characteristic polynomial $P_D(X)$ and are also the eigenvalues of the matrix D.

3.2 إختصار تشاكل ذاتي *Endomorphism reduction*

فيما يلي نعتبر E فضاء شعاعي ذو بعد منته، على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي (تشاكل ذاتي) مصفوفته المرافقة هي A.

Here we consider E as a finite-dimensional vector space, on the commutative field $\mathbb{K}$ and f is a linear application (endomorphism) whose associated matrix is A.

نقصد باختصار A على شكل قطري هو إيجاد أساس لـ E بحيث تكون مصفوفة f بالنسبة إليه مصفوفة قطرية. حينئذ توجد مصفوفة مربعة قابلة للقلب P تسمى مصفوفة العبور بحيث $D = P^{-1}AP$ أي أن A و D مشابهان.

We mean by short A in diagonal form, is to find a basis for the space E for which the matrix of f is a diagonal matrix. Then there is an invertible square matrix P called transit matrix such that $D = P^{-1}AP$ i.e. A and D are similar matrices.

2.3.2 : Theorem - نظرية

ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته، على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$، وليكن $f : E \longrightarrow E$ تطبيق خطي و $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ من $\mathbb{K}$، m قيمة ذاتية مختلفة لـ f.

Let E be a finite-dimensional vector space, on the commutative field $\mathbb{K}$, and let $f : E \longrightarrow E$ be a linear application and $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ are an m-different eigenvalue of f from $\mathbb{K}$.

نقول عن f إنه قابل للتقطير أو المصفوفة المرافقة له مشابهة لمصفوفة قطرية إذا كان E مجموع مباشر لفضاءاته الجزئية الذاتية أي:

We say that f is indivisible or its associated matrix is similar to a diagonal matrix if E is a direct sum of its sub-eigen-vectorial spaces, i.e.:

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}$$

3.3.2 : Remark - ملاحظة

إذا كانت القيمة الذاتية λ ذات رتبة تضاعف r في كثير الحدود المميز فإن بعد الفضاء الذاتي E_λ المرافق للقيمة الذاتية λ على الأكثر m. وبالتالي:

If the eigenvalue λ is of the order of multiples of r in the distinct polynomial, then the dimension of the sub-eigen-vectorial spaces E_λ associated to the eigenvalue λ is at most m. Therefore:

$$1 \leq \dim (E_\lambda) \leq r.$$

و إذا كان f قابل للتقطير أو المصفوفة المرافقة له مشابهة لمصفوفة قطرية فإن حتما

If f is diagonalizable or its associated matrix is similar to a diagonal matrix, then inevitably we *have:*

$$\dim(E_\lambda) = r.$$

4.3.2 : Example - مثال

Let لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

لنثبت أن A قابلة للتقطير في $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ثم نبحث عن المصفوفة P حيث $P^{-1}AP$ حتى تكون مصفوفة قطرية.

Let's prove that A is diagonalizable to $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ and then find the matrix P where $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

1) نبدأ بحساب كثير الحدود المميز لـ A :

We start by calculating the characteristic polynomial of A :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

2) جذور كثير الحدود المميز هي الأعداد الحقيقية 1 بدرجة تضاعف $m(1) = 2$ و 2 درجة التضاعف $m(2) = 1$.

The roots of the characteristic polynomial are the real numbers 1 with a multiple of $m(1) = 2$ and 2 with a multiple of $m(2) = 1$.

3) لنحدد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية

Let's define the sub-eigen-vectorial spaces

1.1) ليكن E_1 الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي للقيمة الذاتية المضاعفة 1 :

Let E_1 be the sub-eigen-vectorial space of the doubled eigenvalue 1 :

$$E_1 = Ker(A - I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot X = X\}.$$

إذا وضعنا

If we put

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ومنه :

then:

$$X \in E_1 \iff AX = X \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x, & y, & y - x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

المستوي المولد على سبيل المثال من الأشعة $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ تشكل أساس.

The generated plane for example from the vectors $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *and* $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *forms a basis.*

(2.1 ليكن E_2 الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرافق للقيمة الذاتية البسيطة 2 :

Let E_2 *be the sub-eigen-vectorial space associated with the simple eigenvalue* 2 *:*

$$E_2 = Ker(A - 2I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot X = 2X\}.$$

ومنه :

then

$$X \in E_2 \iff A \cdot X = 2X \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \iff x = 0 \quad and \quad y = 0$$

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$ هو مستقيم شعاع توجيهه $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ و يشكل أساس له.

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$ *he is straight with vector beam* $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *and forms the basis for it.*

(3 أبعاد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية مساوية لدرجة تضاعف القيم الذاتية المرافقة لها:

The dimensions of the sub-eigen-vectorial spaces are equal to the degree of multiplication of their associated eigenvalues:

$$\dim E_1 = 2 = m(1), \quad \dim E_2 = 1 = m(2).$$

ومنه المصفوفة A قابلة للتقطير.

So the matrix A is diagonalizable.

4) في الأساس (X_1, X_2, X_3)، التشاكل الذاتي الممثل بالمصفوفة A (في الأساس القانوني) له المصفوفة:

In the base (X_1, X_2, X_3), the endomorphism represented by the matrix A (in the canonical basis) has the matrix:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

بصفة أخرى، نضع P مصفوفة العبور التي أشعة أعمدتها X_1، X_2 و X_3 على الترتيب أي:

In other words, we put P the transit matrix whose column vectors are X_1, X_2 and X_3 in order, i.e.:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

then, $P^{-1}AP = D$.

ومنه $P^{-1}AP = D$.

4.2 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 2*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

لتكن A مصفوفة من $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ المعرفة كمايلي :

Let A be a matrix of $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ defined as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) هل المصفوفة A قابلة للتقطير ؟

Is the matrix A diagonalizable?

2) أحسب $(A - 2I_3)^2$ ثم $(A - 2I_3)^n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$. إستنتج A^n.

Calculate $(A-2I_3)^2$ then $(A-2I_3)^n$ for each $n \in \mathbb{N}$. Deduce A^n.

Solution - الحـــل

1) حساب كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

We compute the characteristic polynomial of the matrix A.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -4 & 4-X & 0 \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-4X+4) = (2-X)^3.$$

المصفوفة A تقبل قيمة ذاتية واحدة هي 2 إذا كان قطرية، فستكون مشابهة للمصفوفة $2.I_3$، لذلك ستكون مساوية لـ $2I_3$ وهذا ليس هو الحال ، لذلك لا يمكن أن تكون قابلة للتقطير.

The matrix A accepts a single eigenvalue is 2. If it were a diagonal, it would be similar to the matrix $2.I_3$, so it would be equal to $2I_3$ which is not the case, so it cannot be diagonalizable.

2) **لدينا:**

we have

$$(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

وبالتالي $(A-2I_3)^0 = I$،

So $(A-2I_3)^0 = I$,

$$(A-2I_3)^1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و من أجل $n \geq 2$ **لدينا** $(A-2I_3)^n = 0$.

and for $n \geq 2$ we have $(A-2I_3)^n = 0$.

نلاحظ أن الفضاء الشعاعي الذاتي للقيمة 2

We note that the eigen-vectorial space associated to 2

$$\begin{aligned} E_{\lambda=2} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\right\} \\ &= \left\{(x, 2x, z) : x, y \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \langle (1,2,0), (0,0,1) \rangle \end{aligned}$$

ذو بعد يختلف عن بعد الفضاء $\mathbb{R}^3$:

It has a dimension different from the space dimension of $\mathbb{R}^3$:

$$\dim\left(E_{\lambda=2}\right) = 2 \neq 3$$

وهذا ما يؤكد أيضا أن المصفوفة A غير قابلة للتقطير.

This also confirms that the matrix A is not diagonalizable.

نضع $B = A - 2I_3$ ولدينا $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ حيث $B^n = 0$ من أجل $n \geq 2$. علاوة على ذلك ، المصفوفات B و $2I_3$ متبادلة، لذلك

We put $B = A - 2I_3$ and we have $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ where $B^n = 0$, for $n \geq 2$. Furthermore, the matrices B and $2I_3$ are interchangeable, therefore:

$$A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k}$$

حيث C_n^k هي معاملات نيوتن ذات الحدين :

where C_n^k are Newton's binomial coefficients:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ومع ذلك ، من أجل $k \geq 2$ لدينا $B^k = 0$ من أجل $n \geq 2$،

However, for $k \geq 2$ we have $B^k = 0$, for $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
A^n &= C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1} \\
&= 2^n I_3 + 2^{n-1} n B \\
&= 2^n I_3 + 2^{n-1} n (A - 2I_3) \\
&= 2^n (1-n) I_3 + 2^{n-1} n A.
\end{aligned}$$

then ومنه

$$\begin{aligned}
A^n &= 2^n(1-n)I_3 + n2^{n-1}A. \\
&= 2^n(1-n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(n-1)2^n & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n & 0 \\ -n2^n & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

Let the matrix لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) أوجد كثير الحدود المميز للمصفوفة A.
Find the characteristic polynomial of the matrix A.

2) أثبت أن المصفوفة A قابلة للتقطير ثم أوجد المصفوفة D القطرية ومصفوفة العبور P العكوسة حيث $A = PDP^{-1}$.
Prove that the matrix A is diagonalizable and then find the diagonal matrix D and the invertible transit matrix P where $A = PDP^{-1}$.

3) أحسب A^n من أجل $n \in \mathbb{N}$.
Calculate A^n for $n \in \mathbb{N}$.

Solution - الحــل

1) حساب كثير الحدود المميز P_A للمصفوفة A.

Compute the characteristic polynomial P_A of the matrix A.

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} &= (4-X) \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)(X^2 - 6X + 8) \\ &= (4-X)(X-4)(X-2) \\ &= (2-X)(4-X)^2 \end{aligned}$$

2) كثير الحدود المميز P_A يقبل جذرين ومنه المصفوفة A تملك قيمتين ذاتيتين $\lambda_1 = 2$ قيمة ذاتية بسيطة و $\lambda_2 = 4$ قيمة ذاتية مضاعفة .

The characteristic polynomial P_A accepts two roots, of which the matrix A has two eigenvalues $\lambda_1 = 2$ simple eigenvalue and $\lambda_2 = 4$ a double eigenvalue.

لنحدد الفضاءات الشعاعية الذاتية المرافقة. ليكن

Let's define the associated eigen-vectorial spaces. So let

$$E_1 = \{V = (x, y, z) : AV = 2V\}$$

We solve the system: **نقوم بحل الجملة:**

$$\begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x + 4y + 2z = 2y \\ -x + 3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

الفضاءالشعاعي الذاتي E_1 **المرافق للقيمة الذاتية** 2 **هو مستقيم شعاع توجيهه هو** $e_1 = (1, -2, 1)$.

The eigen-vectorial space E_1 associated to the eigenvalue 2 is a straight line whose directional vector $e_1 = (1, -2, 1)$.

Let **ليكن**

$$E_2 = \{v = (x, y, z) : Av = 4v\}$$

We solve the system: **نقوم بحل الجملة:**

$$\begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \iff z = -x$$

الفضاءالشعاعي الذاتي E_2 **المرافق للقيمة الذاتية** 4 **هو المستوي ذو المعادلة:** $z = -x$ **التي يتم إعطاء أساسها ، على سبيل المثال من قبل الأشعة** $e_2 = (0, 1, 0)$ **و** $e_3 = (1, 0, -1)$.

The eigen-vectorial space E_2 associated to the eigenvalue 4 is the plane with the equation: $z = -x$ whose basis is given, for example by the vectors $e_2 = (0, 1, 0)$ and $e_3 = (1, 0, -1)$.

لاحظ أنه يمكننا القراءة مباشرة من المصفوفة A**، حقيقة أن الشعاع** $\vec{e}_2$ **هو شعاع ذاتي مرتبطة بالقيمة الذاتية** 4.

Note that we can read directly from the matrix A, the fact that the vector $\vec{e}_2$ is an eigenvector associated with the eigenvalue 4.

أبعاد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية تساوي تعدد القيم الذاتية المرافقة وبالتالي، الفضاء $\mathbb{R}^3$ يقبل أساس الأشعة الذاتية والمصفوفة A قابلة للتقطير.

The dimensions of the sub-eigen-vectorial spaces are equal to the multiplicity of the associated eigenvalues. Thus, the space $\mathbb{R}^3$ accepts the basis of the eigenvectors and the matrix A is diagonalizable.

نضع P مصفوفة العبور، ومنه:

We put P as the transit matrix, from which:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

و المصفوفة القطرية D المرافقة لها

and the associated diagonal matrix D

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

We have the relationship: **لدينا العلاقة:**

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3) **حساب A^n من أجل $n \in \mathbb{N}$.**

Compute A^n for $n \in \mathbb{N}$.

من السؤال السابق لدينا $A = PDP^{-1}$ ومنه من أجل $n \in \mathbb{N}$، $A^n = PD^nP^{-1}$ و

From the previous question we have $A = PDP^{-1}$, then for $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ and

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix},$$

يبقى علينا حساب P^{-1}. ونعلم أن

We are left with the calculation of P^{-1} and we know that

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\left(P^*\right)^T$$

where أين

$$\det P = -2, \quad P^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

then, we have: ومنه لدينا:

$$\begin{aligned} A^n &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2^n+1 & 0 & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1} & 2^{n+1}-2 \\ 1-2^n & 0 & 2^n+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

لتكن المصفوفة A :

Let the matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) أقطر المصفوفة A.

Diagonalize the matrix A.

2) عبر عن حلول الجملة التفاضلية $X' = AX$ في قاعدة الأشعة الذاتية وأرسم مساراتها.

Express the solutions of the differential system $X' = AX$ in the eigenvector rule and draw their paths.

Solution - الحل

1) تقطير المصفوفة A.

Diagonalization of the A matrix.

كثير الحدود المميز

characteristic polynomial

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$

المصفوفة A تقبل قيمتين ذاتيتين مختلفتين ومنه فهي قابلة للتقطير.

The matrix A accepts two different eigenvalues, therefore it is diagonalizable.

إيجاد الأساس الذاتي لـ A.

Finding the eigen-basic vectors of A.

ليكن $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$،

Let $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Au = u \iff x = y \quad \text{و} \quad Au = -u \iff x = -y.$$

نلاحظ أن $u_1 = (1, 1)$ و $u_2 = (-1, 1)$ ، حيث : u_1 الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية 1 و u_2 الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية -1 هما مستقلان خطيا، لذا فيشكلان أساسا لـ $\mathbb{R}^2$ وبالتالي لدينا $A = PDP^{-1}$ حيث

Note that $u_1 = (1, 1)$ and $u_2 = (-1, 1)$, where: u_1 eigenvector of eigenvalue 1 and u_2 eigenvector of eigenvalue -1 are linearly independent, so they form the basis of $\mathbb{R}^2$ and thus we have $A = PDP^{-1}$ where

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) ليكن Y حيث $PY = X$ لدينا إذن

Let Y where $PY = X$ then we have

$$X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = DY.$$

حلول الجملة التفاضلية $X' = AX$ في أساس الأشعة الذاتية (u_1, u_2) هي حلول الجملة $Y' = DY$.
إذا كان $Y = (x, y)$ لدينا $x'(t) = x(t)$ و $y'(t) = -y(t)$ بالتالي حلول الجملة هي $x(t) = ae^t$ و $y(t) = be^{-t}$ حيث a و b ثوابت حقيقية. وتكون مساراتها في الأساس الذاتي (u_1, u_2) عبارة عن منحنيات ذات المعادلة $y = c/x$ مع $c \in \mathbb{R}$ فروع من القطوع الزائدة.

The solutions of the differential system $X' = AX$ in the eigenvector (u_1, u_2) are the solutions of the system $Y' = DY$. If $Y = (x, y)$ we have $x'(t) = x(t)$ and $y'(t) = -y(t)$ then the solutions to the system are $x(t) = ae^t$ and $y(t) = be^{-t}$ where a and b are real constants, and their trajectories in the eigenvalue (u_1, u_2) are curves of the equation $y = c/x$ with $c \in \mathbb{R}$ branches of hyperboles.

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

Let the matrix A لتكن المصفوفة A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) حلل كثير الحدود المميز لـ A إلى جداء عوامل ثم أوجد القيم الذاتية للمصفوفة.
Factorize the characteristic polynomial of A and then find the eigenvalues of the matrix.

2) أوجد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية لـ A.
Find the sub-eigen-vectorial spaces of A.

3) هل المصفوفة A قابلة للتقطير؟
Is the matrix A diagonalizable?

Solution - الحـــل

1) كتابة كثير الحدود المميز للمصفوفة A على شكل جداء عوامل: لدينا

Writing the characteristic polynomial of the matrix A as a product of factors: We have

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 3-X & 2 & 4 \\ -1 & 3-X & -1 \\ -2 & -1 & -3-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} C_1 \longleftarrow C_1 - C_3 & & \\ -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 1+X & -1 & -3-X \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$$

$$= (-1-X)(X^2-4X+4) = -(X+1)(X-2)^2$$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda_1 = -1$ قيمة ذاتية بسيطة و $\lambda_2 = 2$ قيمة ذاتية مضاعفة.

The eigenvalues of A are $\lambda_1 = -1$ a simple eigenvalue and $\lambda_2 = 2$ multiplicative eigenvalue.

2) **إيجاد الفضاءات الشعاعية الذاتية الجزئية للمصفوفة A.**

Find the eigen-sub-vectorial spaces of the matrix A.

بالنسبة للقيمة الذاتية -1 ليكن الفضاء الشعاعي الجزئي E_{-1} المعرف

For the eigenvalue -1 let the sub-vectorial space E_{-1} be defined as

$$E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3,\ Au = -u\}.$$

let $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, **ليكن** $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$،

$$u \in E_{-1} \iff \begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

الفضاء E_{-1} هو مستقيم شعاع توجيهه هو

The space E_{-1} is a straight line whose directional vector

$$u_1 = (1, 0, -1).$$

الفضاء الشعاعي الجزئي المرافق للقيمة 2 الفضاء الشعاعي E_2 المعرف

The sub-vectorial space associated with the value 2 is the vectorial space E_2 defined by

$$E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3,\ Au = 2u\}.$$

let $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ليكن $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in E_2 \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x - y - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

3) الفضاء E_2 هو مستقيم شعاع توجيهه

The space E_2 is a straight line whose directional vector

$$u_2 = (2, 1, -1).$$

الفضاء الشعاعي الجزئي E_2 ذو بعد 1، ومنه المصفوفة A ليست قابلة للتقطير.

The sub-vectorial space E_2 is of dimension 1, then the matrix A is not diagonalizable.

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

نسمي مصفوفة $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ عشوائية إذا كانت معاملاتها أعداد حقيقية موجبة أو معدومة وإذا كان مجموع معاملات كل من أسطرها يساوي 1.

We call a matrix $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ random if its coefficients are positive or null real numbers and if the sum of the coefficients of each of its rows is 1.

1) أثبت أنه إذا كانت $\lambda \in \mathbb{C}$ قيمة ذاتية للمصفوفة A فإن $|\lambda| \leq 1$.

Prove that if $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue of A then $|\lambda| \leq 1$.

2) أثبت أن 1 قيمة ذاتية ثم أوجد الشعاع الذاتي المرافق له.

Prove that 1 is an eigenvalue and then find its eigenvector.

Solution - الحـــل

1) نفرض أن $\lambda \in C$ قيمة ذاتية للمصفوفة A وليكن z شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية. ليكن $i \in \{1, \ldots, n\}$ حيث $|z_i| = \max_{j=1,\ldots,n} |z_j|$. العمود رقم i من احداثيات المصفوفة Az تحقق $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j$ وهذا يجب أن يساوي λz_i. بأخذ القيمة المطلقة واستخدام القاعدة الثلاثية نحصل على

Let $\lambda \in C$ be an eigenvalue of the matrix A and let z be an eigenvector of the eigenvalue. Let $i \in \{1, \ldots, n\}$ where $|z_i| = \max_{j=1,\ldots,n} |z_j|$. be column number i from the coordinates of the matrix Az, make $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j$ and this should equal λz_i. By taking the absolute value and using the triple rule, we get

$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|z_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|z_i| \leq |z_i|$$

حيث نستعمل أيضا $a_{i,j} \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. ومنه قد تحصلنا على $|\lambda|\,|z_i| \leq |z_i|$. لأن $|z_i| \neq 0$ (وإلا z يكون الشعاع المعدوم) هذا يعني أن $|\lambda| \leq 1$.

We also use $a_{i,j} \geq 0$ and $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Then, we get $|\lambda|\,|z_i| \leq |z_i|$. because $|z_i| \neq 0$ (otherwise z is the zero vector). This means that $|\lambda| \leq 1$.

2) **يكفي أخذ**

Enough take

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

كي نلاحظ أن $Az = z$. وبالتالي يكون z شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية 1.

To note that $Az = z$. So z is an eigenvector associated to the eigenvalue 1.

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

اشرح بدون حساب سبب عدم إمكانية تقطير المصفوفة التالية : *Explain without calculating why the following matrix diagonalization is not possible:*

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Solution - الحــل

المصفوفة A مثلثية علوية قيمها الذاتية هي عناصر قطرها المتمثلة في قيمة واحدة هي i. إذا كانت المصفوفة A قابلة للتقطير فحتما نستطيع إيجاد مصفوفة عكوسة $P \in GL_3(\mathbb{C})$ تحقق:

The matrix A is an upper triangular matrix whose eigenvalues are the elements of a single value i of diagonal. If the matrix A is diagonalizable then we can find an invertible matrix $P \in GL_3(\mathbb{C})$ check:

$$A = P(iI_3)P^{-1}.$$

لكن ولأن المصفوفة I_3 تبادلية مع جميع المصفوفات فإن:

However, because the matrix I_3 is commutative with all matrices, then:

$$A = iI_3PP^{-1} = iI_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

وليس هو الحال لهذا فإن المصفوفة A غير قابلة للتقطير.

this is not the case, so the matrix A is not diagonalizable.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

ليكن m عدد حقيقي و f تشاكل ذاتي على $\mathbb{R}^3$ ذو المصفوفة A المعطاة في الأساس القانوني كما يلي:

Let m be a real number and f endomorphism of $\mathbb{R}^3$ with matrix A given in canonical basis as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1) أوجد القيم الذاتية للتطبيق f ؟

Find the eigenvalues of f?

2) ماهي قيم m حتى يكون التطبيق الخطي قابل للتقطير ؟

What are the values of m for a linear application to be diagonalizable?

3) نفرض أن $m = 2$. أحسب A^k من أجل كل $k \in \mathbb{N}$.

Suppose that $m = 2$. Calculate A^k for each $k \in \mathbb{N}$.

Solution : الحــل

1) إيجاد كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

Find the characteristic polynomial of the matrix A.

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} =_{C_1+C_2\to C_1} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-2 & -1 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} \\ &=_{L_2-L_1\to L_2} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ 2-m & X-m \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2)(X-m). \end{aligned}$$

القيم الذاتية لـ f هي 1 و 2 بشكل خاص إذا أخذنا $m=1$ أو 2 فإن f يقبل فقط قيمتين ذاتيتين.

The eigenvalues of f are 1 and 2 in particular if we take $m = 1$ or 2 then f accepts only two eigenvalues.

2) **إذا كان $m \neq 1$ و $m \neq 2$ فإن f التشاكل الذاتي من $\mathbb{R}^3$ الذي يقبل ثلاث قيم ذاتية مختلفة : يكون هنا f قابل للتقطير و إذا كان $m=1$ فإن كثير الحدود المميز لـ f هو $(1-X)^2(2-X)$. ويكون f قابل للتقطير فقط إذا كان بعد الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي للقيمة الذاتية 1 يساوي 2. لنبحث عن هاته الفضاءات الشعاعية الجزئية (تذكر أن $m=1$). من أجل $u=(x,y,z)$ لدينا:**

If $m \neq 1$ and $m \neq 2$ then f is an endomorphism of $\mathbb{R}^3$ which has three different eigenvalues: here f is diagonalizable and if $m = 1$. The characteristic polynomial of f is $(1-X)^2(2-X)$, and f is diagonalizable only if the dimension of the eigen-sub-vectorial space of eigenvalue 1 is 2. Let's find these eigen-sub-vectorial space (remember that $m = 1$). For $u = (x, y, z)$ we have:

$$f(u)=u \iff \begin{cases} z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ x-y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= x \\ z &= 0 \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-I)$ الشعاع $(1,1,0)$. بُعد الفضاء الذاتي $2 \neq 1$: ومنه المصفوفة غير قابلة للتقطير. نفرض الآن أن $m=2$. نبحث عن بُعد الفضاء $Ker(f-2I)$. لدينا من أجل $u=(x,y,z)$:

We take as a basis for the space $Ker(f-I)$ the vector $(1,1,0)$. eigen-sub-vectorial space dimension is $1 \neq 2$: of which the matrix is not diagonalizable. Now let $m=2$. We are looking for the dimension of space $Ker(f-2I)$. We have for $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=2u \iff \begin{cases} -x+z &= 0 \\ -x+z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= x \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-2I)$ الشعاعين $(1,0,1)$ و $(0,1,0)$. بشكل خاص بُعد الفضاء $Ker(f-2I)$ هو 2 و f هنا قابل للتقطير.

We take as a basis for the space $Ker(f-2I)$ the vectors $(1,0,1)$ and $(0,1,0)$. Specifically the space dimension of $Ker(f-2I)$ is 2 and f here is diagonalizable.

3) لنقطر f. وجدنا سابقا أساس ذاتي بالنسبة للقيمة الذاتية 2. من أجل القيمة الذاتية 1 ($m=2$) لدينا من أجل $u=(x,y,z)$:

Let's diagonalize f. We previously found an eigenvector for the eigenvalue 2. For the eigenvalue 1, $(m=2)$ we have for $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=u \iff \begin{cases} z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= x \\ z &= 0 \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-I)$ الشعاع $(1,1,0)$. ليكن $u=(1,1,0)$، $v=(0,1,0)$ و $w=(1,0,1)$. ومنه (u,v,w) أساس ذاتي لـ f في هذا الأساس مصفوفة f هي:

We take as a basis for the space $Ker(f-I)$ the vector $(1,1,0)$. Let $u=(1,1,0)$, $v=(0,1,0)$ and $w=(1,0,1)$. From which (u,v,w) is an eigenvector of f. In this basis, the matrix f is:

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

لتكن P مصفوفة العبور من الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^3$ الى الأساس (u,v,w). المصفوفة P المعطات بـ:

Let P be the transit matrix of the canonical basis of space $\mathbb{R}^3$ to the base (u, v, w). The matrix P is given by:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولدينا $A = PDP^{-1}$. يجب أن نحسب P^{-1}. نجد:

We have $A = PDP^{-1}$. We have to calculate P^{-1}. We find:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

من $A = PDP^{-1}$ نستنتج بالتراجع أن $A^k = PD^kP^{-1}$. لكن و لأن المصفوفة D قطرية لدينا:

From $A = PDP^{-1}$, we conclude bu induction that $A^k = PD^kP^{-1}$. But since the matrix D is diagonal, we have:

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

After the calculations we find in the latter بعد الحسابات نجد في الأخير

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

الفصل الثالث

المعادلات الخطية *Linear equations*

فهرس الفصل

يعد الجبر الخطي أداة أساسية لجميع فروع الرياضيات، لا سيما عندما يتعلق الأمر بالنمذجة ثم حل المشكلات عدديا من مختلف المجالات: العلوم الفيزيائية أو الميكانيكية، وعلوم الحياة، والكيمياء، والاقتصاد، والعلوم الهندسية...

Linear algebra is an essential tool for all branches of mathematics, especially when it comes to modeling and then numerically solving problems from various fields: physical or mechanical sciences, life sciences, chemistry, economics, engineering sciences...

تدخل المعادلات الخطية من خلال تطبيقاتها في العديد من السياقات، لأنها تشكل الأساس الحسابي للجبر الخطي. كما أنها تسمح بمعالجة جزء كبير من نظريات الجبر الخطي في الفضاءات ذات الأبعاد المنتهية.

Linear equations, through their applications in many contexts, as they form the computational basis of linear algebra. It also allows the treatment of a large part of the theories of linear algebra in finite-dimensional spaces.

لهذا سوف نُخَصِّص هذا الجزء لموضوع الجمل الخطية ذات عدد كيفي من المعادلات أو من المجاهيل. وسوف ندرس عدة طرق لحل مثل هذه الجمل مع بعض الأمثلة العددية لشرح المراحل المتبعة أثناء الحل لكل طريقة.

Therefore, we will devote this part to the topic of linear sentences with an arbitrary number of equations or variables. We will study several ways to solve such systems with some numerical examples to explain the stages followed during the solution for each method.

1.3 جمل المعادلات الخطية *Linear equations system*

في كل ما سيأتي من هذا الفصل، نعتبر الحقل التبديلي $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.

In all that follows in this chapter, we consider the commutative field $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$

1.1.3 : Definition - تعريف

نسمي جملة خطية ذات n معادلة و m مجهول أو جملة خطية ذات معاملات من الحقل $\mathbb{K}$، كل جملة معادلات من الشكل:

We call a linear system with n equations and m unknowns or a linear system with coefficients in the field $\mathbb{K}$, each system of equations of the form:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

حيث من أجل كل $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq p$ المعاملات a_{ij} و b_i من $\mathbb{K}$. الشعاع

where for each $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq p$ the coefficients are a_{ij} and b_i of $\mathbb{K}$. The vector:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$$

يحقق جميع المعادلات المكونة للجملة S، و يسمى حلاً للجملة S.

it satisfies all the equations that make up the system S, and is called a solution to the system S.

الشعاع :

The vector:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

فيسمى الطرف الثاني للجملة الخطية S.

is called, the second term of the linear system S.

نسمى المجموعة

We call the set

$$\mathcal{H}(S) = \{x \in \mathbb{K}^p, \quad \text{حل للجملة } S \; x \; (x \text{ system solution of } S) \quad \}$$

مجموعة حلول الجملة (S).

The system solution set (S).

1.1.3 حالات خاصة Special cases

1) **إذا كان** : $n = p$، **فإن الجملة** S **تسمى جملة مربعة.**

If: $n = p$, then the system S is called a square system.

2) **إذا كان** : $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$، **فإننا نسمي الجملة** S **جملة متجانسة، وعندئذ ترمز للجملة بالرمز** S_0 **ذات** n **معادلةً و** p **مجهول :**

If: $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, then we call the system S a homogeneous system, then we denote the system by S_0 with n equations and p unknowns :

$$(S_0)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

الجملة المتجانسة المُرافقة للجملة الخطية S.

The homogeneous system associated to the linear system S.

2.1.3 : Definition - تعريف

نقول عن جملتين $S1$ و $S2$ أنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس مجموعة الحلول، أي

Two systems $S1$ and $S2$ are equivalent if they have the same set of solutions, ie.:

$$\mathcal{H}(S1) = \mathcal{H}(S2).$$

2.1.3 Matrix form of linear system الشكل المصفوفي لجملة خطية

3.1.3 : Definition - تعريف

ليكن n و p عددان طبيعيان غير معدومين. ولتكن الجملة الخطية التالية

Let n and p two non-zero natural numbers. Let the following linear system

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

we put نضع

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

نسمى المصفوفة A بمصفوفة الجملة الخطية (S) و X بشعاع الحلول و B الطرف الثاني للجملة. ومنه ينتج لدينا الكتابة:

The matrix A is called the matrix of the linear system (S), X is called the solution vector, and B is called the second term of the system. Hence we have writing:

$$AX = B$$

أي يمكن أن نكتب

Which we can write

$$(S^*) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

نسمى S^* بالكتابة المصفوفية للجملة الخطية (S).

S^* is called the matrix form of the linear system (S).

2.3 Solving linear systems حل الجمل الخطية

1.2.3 Substitution method طريقة التعويض

لمعرفة ما إذا كان هناك حل واحد أو أكثر لجملة خطية، ولحساب الحلول، فإن الطريقة الأولى هي طريقة التعويض. على سبيل المثال بالنسبة لجملة الخطية التالية:

To find out if there are more than one solutions to a linear system, and to calculate the solutions, the first method is the substitution method. For example let the following linear system:

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y & = & 1 \\ 2x - 7y & = & -2 \end{cases}$$

نعيد كتابة السطر الأول $3x + 2y = 1$ على الشكل التالي $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$ نستبدل أو نعوض y في المعادلة الثانية بالعبارة $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$ نتحصل على جملة مكافئة :

We rewrite the first line $3x+2y=1$ in the following form $y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x$. We replace or substitute y in the second equation with $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x$. We get an equivalent system:

$$\begin{cases} y &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \\ 2x-7(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x) &= -2 \end{cases}$$

المعادلة الثانية تحتوي على المتغير x فقط، ويمكننا حلها بكل بساطة:

The second equation contains only the variable x, and we can solve it very simply:

$$\begin{cases} y &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \\ (2+7\cdot\frac{3}{2})x &= -2+\frac{7}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \\ x &= \frac{3}{25} \end{cases}$$

يبقى فقط تعويض قيمة x التي تم الحصول عليها في المعادلة الأولى:

It remains only to substitute the obtained value of x into the first equation:

$$\begin{cases} y &= \frac{8}{25} \\ x &= \frac{3}{25} \end{cases}$$

ومنه الجملة تقبل حلا وحيدا $(\frac{3}{25},\frac{8}{25})$. ومنه مجموعة الحلول هي :

Hence, the system accepts a single solution $(\frac{3}{25},\frac{8}{25})$. Then the solutions set is:

$$\mathcal{H}(\mathcal{S})=\left\{\left(\frac{3}{25},\frac{8}{25}\right)\right\}.$$

2.2.3 Cramer's method طريقة كرامر

نأخذ حالة جملة خطية بسيطة كي نفهم أكثر طريقة حل جملة خطية بواسطة طريقة كرامر لهذا، ليكن

We take the case of a simple linear system in order to understand more how to solve a linear system by Cramer's method, so for this let

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

محدد الجملة الخطية ذات المعادلتين و المجهولين.

The determinant of the linear system with two equations and the two unknowns.

$$\begin{cases} ax+by &= e \\ cx+dy &= f \end{cases}$$

إذا كان $ad-bc\neq 0$، نجد حلاً وحيدا إحداثياته (x,y) هي :

If $ad-bc\neq is0$, we find a unique solution whose coordinates (x,y) are:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} \color{red}{e} & b \\ \color{red}{f} & d \end{vmatrix}}{ad-bc}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a & \color{red}{e} \\ c & \color{red}{f} \end{vmatrix}}{ad-bc}$$

بالنسبة لحساب الإحداثية الأولى x ، نستبدل العمود الأول بالطرف الثاني للمعادلة و بالنسبة للإحداثية الثانية y ، نستبدل العمود الثاني بالطرف الثاني للمعادلة.

For calculating the first coordinate x, we replace in the determinant the first column with the second side of the equation and for the second coordinate y we replace the second column with the second side of the equation.

1.2.3 : Example - مثال

Let the system لتكن الجملة

$$\begin{cases} tx-2y &= 1 \\ 3x+ty &= 1 \end{cases}$$

حسب قيم الوسيط $t\in\mathbb{R}$. محدد الجملة هو:

according to intermediate values $t\in\mathbb{R}$. The system determinant is:

$$\Delta=\begin{vmatrix} t & -2 \\ 3 & t \end{vmatrix}=t^2+6$$

لا ينعدم ولهذا يوجد حل وحيد والجملة الخطية هي جملة كرامر، الحل (x,y) يحقق:

It does not zero, for this there is only one solution and the linear system is Cramer's system, *the solution (x, y) achieves:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{t^2+6} = \frac{t+2}{t^2+6}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} t & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{t^2+6} = \frac{t-3}{t^2+6}.$$

For each t the solutions set is: من أجل كل t مجموعة الحلول هي:

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \left\{ \left(\frac{t+2}{t^2+6}, \frac{t-3}{t^2+6} \right) \right\}.$$

3.2.3 طريقة غوص Gauss's method

بفضل استعمال العمليات الأساسية على أسطر المصفوفة A، تعتبر طريقة غوص طريقة منهجية تسمح بتحويل الجملة الخطية S إلى جملة خطية أخرى S' مكافئة لها بحيث تكون مصفوفة الجملة الخطية الجديدة مثلثية علوية (فقط، وليس بالضرورة قطرية كما في طريقة غوص - جوردان)، وكل عناصرها القطرية غير معدومة (ليس ضروريا أن تكون مساوية لـ 1). طريقة غوص تسعى إلى جعل جميع عناصر المصفوفة التي تقع أسفل القطر الرئيسي معدومة أي أن للجملة الخطية مصفوفة متدرجة.

With the help of basic processes on the lines of the matrix A, the Gauss's method is a systematic method that allows the conversion of the linear system S into another linear system S' equivalent to it, so that the matrix of the new linear system is upper triangular (only, not necessarily diagonal as in the method Gauss-Jordan), and all its diagonal elements are not-zero (it doesn't have to be equal to 1). A Gauss's method seeks to make all elements of the matrix below the main diagonal zero, i.e. the linear system has a gradient matrix.

وقبل أن نبدأ، نذكر بعض التحويلات الأولية التي يمكننا تطبيقها على جملة المعادلات بحيث نحصل على جملة معادلات مكافئة، أي لها نفس الحل، وهذه التحويلات هي:

Before we start, we mention some elementary transformations that we can apply to a system of equations so that we get an equivalent system of equations, that is, they have the same solution, and these transformations are:

- **تبديل معادلتين: وهذا واضح أنه لا يغير الحل.**

Substituting two equations: This obviously does not change the solution.

- ضرب طرفي معادلة بعدد غير معدوم: إذا كان لدينا طرفان متساويان فإنه بضرب كل طرف بنفس العدد سنحصل أيضا على طرفين متساويين.

Multiplying both sides of an equation by a non-null number: If we have two equal sides, then by multiplying each side by the same number, we will also get two equal sides.

- جمع معادلة مضروبة بعدد مع معادلة أخرى.

Adding an equation multiplied by a number with another equation.

إن مبدأ طريقة غوص هو تحويل جملة المعادلات الخطية

The principle of the Gauss method is to transform the system of linear equations.

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

إلى جملة معادلات مكافئة من الشكل :

into a system of equivalent equations of the form:

$$(S')\begin{cases} c_{11}x_1 & +c_{12}x_2 & +\cdots & +c_{1n}x_n & = d_1 \\ & +c_{22}x_2 & +\cdots & +c_{2n}x_n & = d_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & +c_{nn}x_n & = d_n \end{cases}$$

أي تحويل جملة المعادلات إلى شكل مثلثي يسهل معه حساب قيم المتغيرات. ففي جملة المعادلات المكافئة، من المعادلة الأخيرة نحصل على x_p بسهولة، ونعوضها في المعادلة الماقبل أخيرة لنحصل على x_{p-1} ونعوض القيمتين في المعادلة التي قبلها لنحصل على المتغير الذي ما قبله وهكذا حتى نصل للمعادلة الأولى فنعوض جميع القيم التي تحصلنا عليها كي نجد قيمة x_1.

That is, converting the system of equations into a trigonometric form, with which it is easy to calculate the values of the variables. Then the equivalent equations, from the last equation we get x_p easily, and we substitute it into the next last equation to get x_{p-1} and we substitute the two values in the equation before it to get the variable before it and so on until we reach the first equation, so we substitute all the values that we got to find the value of x_1.

إجراء التحويلات Make transfers

بفرض a_{11} لا يساوي الصفر : إذا قسمنا المعادلة الأولى من جملة المعادلات S الأولى على a_{11} و ضربناها في a_{21} ثم طرحناها من المعادلة الثانية ونطبق نفس الطريقة على بقية المعادلات حسب الصيغة التالية:

Assuming that a_{11} is not equal to zero: If we divide the first equation from the first system of equations S by a_{11} and multiply it by a_{21}, then we subtract it from the second equation and apply the same method to the rest of the equations according to following formula:

$$\boxed{a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{1j} \cdot a_{i1}}{a_{11}}, i, j = 2, ..., n}$$

فإن كان $a_{11} = 0$ نقوم عندها بتبديل المعادلة الأولى مع أي من المعادلات التي تليها بحيث يكون الحد $a_{i1} \neq 0$ حيث i هو رقم السطر. فإن لم نجد، وكانت كلها تساوي الصفر عندها تكون جملة المعادلات الخطية ليس لها حل وحيد، والسبب أن إحدى المعادلات (أو أكثر) مرتبطة خطيا بمعادلات أخرى. بعد هذا التحويل نحصل على جملة خطية من الشكل:

If $a_{11} = 0$ then we swap the first equation with any of the following equations so that the term is $a_{i1} \neq 0$ where i is the line number. If we do not find, and they are all equal to zero, then the total linear equations do not have a single solution, and the reason is that one of the equations (or more) is linearly linked to other equations. After this transformation we get a linear system of the form:

$$(S^{(1)}) \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \cdots & +a_{1n}x_n & = d_1 \\ & +a_{22}^{(1)}x_2 & + \cdots & +a_{2n}^{(1)}x_n & = d_2^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & +a_{n2}^{(1)}x_2 & & +a_{nn}^{(1)}x_n & = d_n^{(1)} \end{cases}$$

وهكذا حذفنا الحد الأول من جميع المعادلة بعد المعادلة الأولى. نكرر العملية بأن نثبت المعادلة الأولى وونعمل على باقي المعادلات بنفس الطريقة الأولى أي أننا نقسم المعادلة الثانية (الجديدة) على محورها وهو $a_{22}^{(1)}$ ونضربها بـ $a_{32}^{(1)}$ ونطرحها من الثالثة وهكذا بنفس المنوال مع البقية حسب الصيغة التالية :

And so we cancel the first term from all equation after the first equation. We repeat the process by fixing the first equation and working on the rest of the equations in the same way as the first, that is, we divide the second (new) equation on its axis, which is $a_{22}^{(1)}$ and multiply it by $a_{32}^{(1)}$ and subtract it from the third and so on in the same way with the rest according to the following formula:

$$\boxed{a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{2j}^{(1)} \cdot a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, i, j = 3, ..., n}$$

وهكذا حذفنا الحد الثاني أيضا من جميع المعادلة بعد المعادلة الثانية. نواصل العملية بنفس المنوال حتى نتحصل على جملة مثلثية والصيغة العامة في التحويلات في هذه الحالة تكون كما يلي:

Thus, we have eliminated the second term as well from all equation after the second equation. We continue the process in the same way until we get a trigonometric system, and the general formula for transformations in this case is as follows:

$$\boxed{a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{kj}^{(k-1)} \cdot a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, k = 1, ..., n-1, i, j = k+1, ..., n.}$$

2.2.3 : Example - مثال

لنستعمل طريقة غوص لإيجاد حلول الجملة :

Let's use the Gauss method to find the solutions of the system:

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 3 \\ x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 0 \end{cases}$$

and we write: ونكتب :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 & L_1 \\ x + 2y + z = 1 & L_2 \\ 2x + y + z = 0 & L_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 & \\ y - z = -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y - 3z = -6 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ y-z &= -2 \\ -4z &= -8 \quad L_2 \leftarrow L_3+L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 0 \\ z &= 2 \end{cases}$$

4.2.3 طريقة انعكاس المصفوفة Matrix inversion method

الجملة الخطية بالشكل المصفوفي A linear system in matrix form

$$\begin{cases} ax+by &= e \\ cx+dy &= f \end{cases}$$

تكافئ equivalent to

$$AX = Y \qquad \text{حيث} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

إذا كان محدد المصفوفة A غير معدوم ، أي إذا $ad-bc \neq 0$، فإن المصفوفة A عكوسة أو قابلة للقلب و

If the determinant of A is non-null, i.e. if $ad-bc \neq 0$, then the matrix A is invertible and

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

و الحل الوحيد $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ للجملة يكتب من الشكل:

and the only solution is $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ for the system write of the form:

$$X = A^{-1}Y.$$

3.2.3 : Example - مثال

Let's solve the following linear system لنحل الجملة الخطية التالية

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+t^2y &= t \end{cases}$$

حسب قيم الوسيط $t\in\mathbb{R}$. محدد الجملة هو :

according to values of the intermediate $t\in\mathbb{R}$. *The determinant of the system is:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{vmatrix} = t^2-1.$$

The first case: $t\neq +1$ *and* $t\neq -1$. 1) الحالة الأولى: $t\neq +1$ و $t\neq -1$.

then $t^2-1\neq 0$. *The matrix* فإن $t^2-1\neq 0$. المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{pmatrix}$$

invertible and his inverse is عكوسة ومقلوبها

$$A^{-1}=\frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

and the solution $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *is of the form* والحل $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ من الشكل

$$X=A^{-1}Y=\frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}=\frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2-t \\ t-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{t}{t+1} \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}.$$

من أجل كل $t\neq\pm1$ مجموعة الحلول هي

For each $t\neq\pm1$ *the solutions set is*

$$\mathcal{H}(\mathcal{S})=\left\{\left(\frac{t}{t+1},\frac{1}{t+1}\right)\right\}$$

.

2) الحالة الثانية: $t=+1$. الجملة الخطية تكتب على الشكل:

The second case: if $t=+1$. The linear system is written in the form:

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= 1 \end{cases}$$

والمعادلتان متطابقتان. هناك عدد غير منته من الحلول:

The two equations are identical. There are an infinite number of solutions:

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \{(x, 1-x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

3) الحالة الثالثة: $t=-1$. الجملة الخطية تكتب على الشكل:

The third case: if $t=-1$. The linear system is written in the form:

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= -1, \end{cases}$$

من الواضح أن المعادلتين غير متوافقتين وبالتالي

It is clear that the two equations are not compatible thus

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \varnothing.$$

3.3 سلسلة التمارين رقم 3 *Exercise series N° 3*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

حل الجمل الخطية التالية باستعمال طريقة غوص:

Solve the following linear system using the Gauss method:

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 3 \\ x & +2y & +z & = & 1 \\ 2x & +y & +z & = & 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & & +2z & = & 1 \\ & -y & +z & = & 2 \\ x & -2y & & = & 1 \end{cases}.$$

Solution - الحـــل

باستخدام طريقة غوص، بالنسبة للجملة الأولى، نكتب:

Using the Gauss method for the first system, we write:

$$\begin{cases} x+y+2z &= 3 \quad L_1 \\ x+2y+z &= 1 \quad L_2 \\ 2x+y+z &= 0 \quad L_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ y-z &= -2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y-3z &= -6 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ y-z &= -2 \\ -4z &= -8 \quad L_2 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 0 \\ z &= 2 \end{cases}$$

ومنه حلول الجملة هي $(x,y,z)=(-1,0,2)$.

The solutions to the system are $(x,y,z)=(-1,0,2)$.

بالنسبة للجملة الثانية، نسير بنفس الطريقة:

For the second system, we proceed in the same way:

$$\begin{cases} x+2z &= 1 \quad L_1 \\ -y+z &= 2 \quad L_2 \\ x-2y &= 1 \quad L_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2z &= 1 \\ -y+z &= 2 \\ -2y-2z &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2z &= 1 \\ -y+z &= 2 \\ -4z &= -4 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{cases}$$

ومنه حلول الجملة هي $(x, y, z) = (-1, -1, 1)$.

The solutions of the system are $(x, y, z) = (-1, -1, 1)$.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

1) أوجد حلول الجملة التالية بأربع طرق مختلفة (بالتعويض ، بالطريقة المحورية لغوص، بقلب مصفوفة المعاملات و باستخدام صيغة كرامر):

Find the solutions to the following system in four different ways (by substitution, by the pivot-Gauss's method, by matrix inversion coefficient and by using Cramer's method):

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$$

2) اختر الطريقة التي تبدو لك أنها الأسرع في الحل، وفقا لقيم a لإيجاد حلول الجمل التالية:

Choose the method that seems to be the fastest to solve, according to the values of a, to find solutions to the following system:

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2+1)x + 2ay = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases}$$

Solution - الحـــل

1.1) **Substitution method طريقة التعويض**

نستطيع كتابة المعادلة الأولى على الشكل التالي $y = 1 - 2x$. نعوض قيمة y في المعادلة الثانية نجد

We can write the first equation as $y = 1 - 2x$. Substituting the value of y into the second equation, we get:

$$3x + 7y = -2 \implies 3x + 7(1 - 2x) = -2 \implies 11x = 9 \implies x = \frac{9}{11}.$$

نستنتج y :

We get y :

$$y = 1 - 2x = 1 - 2\frac{9}{11} = -\frac{7}{11}$$

. ومنه حلول هذه الجملة هي الثنائية: $(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11})$.

The solutions to this system is the pair: $(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11})$.

2.1) طريقة غوص **Gauss's method**

نحتفظ بالسطر الأول L_1 مكانه ونغير موضع السطر L_2 بالسطر $2L_2 - 3L_1$ نجد الجملة المثلثية التالية :

We keep the first line L_1 in its place and change the position of the line L_2 in the line $2L_2 - 3L_1$ we find the following trigonometric system:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 11y = -7 \end{cases}$$

ونستنتج $y = -\frac{7}{11}$ ومنه من السطر الأول نجد $x = \frac{9}{11}$.

and we deduce $y = -\frac{7}{11}$, then from the first line we find $x = \frac{9}{11}$.

3.1) مقلوب المصفوفة **Matrix inverse method**

تكتب الجملة على الشكل المصفوفي كما يلي:

The system is written in matrix form as follows:

$$AX = Y \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

نجد حل الجملة بقلب المصفوفة:

We find the solution to the system by the matrix inverse:

$$X = A^{-1}Y.$$

مقلوب مصفوفة من الرتبة 2×2 يحسب كما يلي:

The inverse of a matrix of order 2×2 is calculated as follows:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{فإن} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ومن الضروري التأكد أن المحدد

It is necessary to ensure that the determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

It differs from 0. **يختلف عن 0.**

we find **نجد**

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} \\ \frac{-7}{11} \end{pmatrix}$$

4.1) طريقة كرامر **Cramer's method**

تكون صيغ كرامر لجملة خطية من معادلتين على النحو التالي إذا كان المحدد يحقق بالطبع : $ad - bc \neq 0$

Cramer's formulas for a linear system of two equations are as follows, if the determinant of course satisfies $ad - bc \neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

which gives us: **الذي يعطينا :**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{9}{11} \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = -\frac{7}{11}$$

2) **بادئ ذي بدء، نتطلع إلى معرفة ما إذا كان هناك حل وحيد، فهذه هي الحالة إذا وفقط إذا كان المحدد ليس معدوما. بالنسبة للجملة الأولى، فإن المحدد هو:**

Firstly, we look to see if there is a unique solution, which is the case if and only if the determinant is not null. For the first system, the determinant is:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

لذلك هناك حل وحيد إذا وفقط إذا كان $a \neq \pm 1$.

So there is only one solution if and only if $a \neq \pm 1$.

بالطبع كل الطرق تؤدي إلى نفس النتيجة، فعلى سبيل المثال باستعمال طريقة التعويض، وعن طريق كتابة السطر الأول على الشكل: $y = 2 - ax$، **وبالتعويض في السطر الثاني نجد** $(a^2+1)x + 2a(2 - ax) = 1$.

Of course, all methods lead to the same result, for example by using the substitution method, and by writing the first line in the form: $y = 2 - ax$, and by substituting in the second line we find $(a^2+1)x + 2a(2-ax) = 1$.

نستنتج أنه إذا كان $a \neq \pm 1$ فإن

We conclude that if $a \neq \pm 1$ then

$$x = \frac{4a-1}{a^2-1} \quad \text{و} \quad y = \frac{-2a^2+a-2}{a^2-1}.$$

الآن نتعامل مع الحالات الخاصة حسب قيم a. إذا كان $a = 1$ فإن الجملة تأخذ الشكل :

Now we deal with the special cases according to the values of a. If $a = 1$, then the system takes the form:

$$\begin{cases} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 1 \end{cases}$$

لكن لا نستطيع أن نتحصل في نفس الوقت على $x + y = 2$ و $x + y = \frac{1}{2}$. ومنه لا توجد حلول.

But we cannot have $x + y = 2$ and $x + y = \frac{1}{2}$ at the same time then, there are no solutions.

إذا كان $a = -1$ فإن الجملة تأخذ الشكل :

If $a = -1$, then the system takes the form:

$$\begin{cases} -x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & 1 \end{cases}$$

and there are no solutions. و لا توجد حلول.

here the determinant هنا المحدد

$$\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a.$$

إذا كان $a \neq 0$ ومنه الحل الوحيد (x, y). مثلا باستعمال صيغة كرامر هو

If $a \neq is0$ then the only solution is (x, y). For example using Cramer's formula is

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a} \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a}.$$

إذا كان $a=0$ لا توجد حلول.

If $a = 0$ there are no solutions.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

أوجد حلول الجملة التالية :

Find solutions to the following system:

$$(S) = \begin{cases} 3x & & +2z & & = 0 \\ & 3y & +z & +3t & = 0 \\ x & +y & +z & +t & = 0 \\ 2x & -y & +z & -t & = 0 \end{cases}$$

Solution - الحـــل

We start by simplifying the system: نبدأ بتبسيط الجملة:

- نغير مكان السطر L_3 إلى السطر الأول وإعتباره محور غوص

We change the position of the line L_3 to the first line and consider it a Gauss's axis

- نعيد ترتيب المتغيرات بالترتيب التالي: y,t,x,z للاستفادة من الأسطر البسيطة بالفعل فنحصل على الجملة.

We rearrange the variables in the following order: y, t, x, z to take advantage of the already simple lines, and we get the system.

$$\begin{cases} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 & L_1 \\ 3y & + & 3t & & & + & z & = & 0 & L_2 \\ -y & - & t & + & 2x & + & z & = & 0 & L_3 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 & L_4 \end{cases}$$

نبدأ طريقة غوص بالتحويلات التالية :

We start with a Gauss method with the following transformations:

$$\begin{cases} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 & \\ & & & - & 3x & - & 2z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 & \end{cases}$$

نجد أن الأسطر الثلاثة الأخيرة متساوية ومنه الجملة تكافئ:

We find that the last three lines are equal, and then, the system is equivalent to:

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

نختار x و y كوسيط ومنه $z = -\frac{3}{2}x$ و $t = -x - y - z = \frac{1}{2}x - y$. ومنه حلول الجملة هي

We choose x and y as arguments, of which $z = -\frac{3}{2}x$ and $t = -x - y - z = \frac{1}{2}x - y$. Then, the set solutions is

$$\mathcal{H}(S) = \left\{ \left(x, y, -\frac{3}{2}x, \frac{1}{2}x - y \right) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

حل الجملة التالية :

Solve the following system:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Solution : الحــل

بالإعتماد على طريقة غوص، نقوم بالتحويلات التالية $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ و $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$ فنتحصل على :

Depending on the Gauss's method, we perform the following transformations $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ and $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$, so we get:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ 5y - 7z = 3b + a \\ 7y + z = 3c - a \end{cases}$$

ثم التحويل $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$ الذي يعطينا الجملة المثلثية :

Then the transformation $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$ which gives us the trigonometric system:

$$\begin{cases} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & & & 54z & = & 5(3c-a)-7(3b+a) \end{cases}$$

من المعادلة الأخيرة نجد : $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ **ثم بالتعويض نتحصل على الحلول:**

From the last equation, we find: $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ Then, by substituting, we get the solutions:

$$\begin{cases} x & = & \frac{1}{18}(8a+5b-c), \\ y & = & \frac{1}{18}(-2a+b+7c), \\ z & = & \frac{1}{18}(-4a-7b+5c). \end{cases}$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

حل الجمل التالية باستعمال طريقة كرامر:

Solve the following systems using Cramer's method:

$$1)\begin{cases} x+y+2z & = & 3 \\ x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+z & = & 0 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x+2z & = & 1 \\ -y+z & = & 2 \\ x-2y & = & 1 \end{cases}$$

Solution - الحـــل

1) **لنتحقق أن الجملة، جملة كرامر بحساب محدد الجملة**

Let's check that the system is Cramer's system, calculates the determinant of the system

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

ومنه الجملة جملة كرامر حلولها من الشكل:

then, the system is Cramer's system, its solutions are of the form:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

2) لنتحقق أن الجملة، جملة كرامر بحساب محدد الجملة

Let's check that the system is Cramer's system, calculates the determinant of the system

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

ومنه الجملة جملة كرامر حلولها من الشكل:

then, the system is Cramer's system, its solutions are of the form:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

حل الجملة التالية باستعمال طريقة المصفوفة المعكوسة وما التفسير الهندسي للنتيجة التي تحصلة عليها؟

Solve the following system using the inverse matrix method, and what is the geometric explanation for the result that you get?

$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

Solution - الحـــل

من شكل الجملة

of the system form

$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

نجد:

we get

$$\det \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix} = 4 - m^2$$

ومنه:

tehn

$$4 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = 2 \vee m = -2$$

إذا كان $m = 2$ فإن المعادلة الثانية تصبح $0 = 12$. والجملة ليس لها حلول.

If $m = 2$ then the second equation becomes $0 = 12$, and the system has no solutions.

إذا كان $m = -2$ المعادلة الثانية تصبح $0 = 0$ وهنا الجملة تقبل عدد غير منته من الحلول أي

If $m = -2$, the second equation becomes $0 = 0$, and here the system accepts an infinite number of solutions, i.e.

$$x + my = -3 \Leftrightarrow x = -3 - my.$$

مجموعة الحلول هي:

The set of solutions is:

$$\mathcal{S} = \{(-3 - my, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

إذا كان $m \neq 2 \vee m \neq -2$, نأخذ:

If $m \neq 2 \vee m \neq -2$, we take:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$$

نقوم بحساب المصفوفة العكسية

We calculate the inverse matrix

$$M^{-1} = \frac{(M^*)^T}{\det(M)} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix}^T}{4 - m^2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -m \\ -m & 1 \end{pmatrix}}{4 - m^2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{m^2 - 4} & \dfrac{m}{m^2 - 4} \\ \dfrac{m}{m^2 - 4} & -\dfrac{1}{m^2 - 4} \end{pmatrix}$$

ومنه حلول الجملة تكون من الشكل

then the system solutions are of the form

$$X = M^{-1}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{m^2-4} & \frac{m}{m^2-4} \\ \frac{m}{m^2-4} & -\frac{1}{m^2-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{m-2} \\ -\frac{3}{m-2} \end{pmatrix}$$

i.e.:

أي:

$$x = \frac{6}{m - 2}, y = -\frac{3}{m - 2}$$

هندسيا ، يمكننا استنتاج أن المستقيمين $x + my = -3$ و $mx + 4y = 6$ هم إما:

Geometrically, we can conclude that the two lines $x + my = -3$ and $mx + 4y = 6$ are either:

- متقاطعان في حالة $m \neq (2, -2)$.

They intersect in the case of $m \neq (2, -2)$.

- متوازيان تماما في حالة $m = 2$.

They are perfectly parallel if $m = 2$.

- ولا على التعيين في حالة $m = -2$.

Not on appointment in the case of $m = -2$.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

ناقش وفقا لقيمة الوسيط $a \in \mathbb{R}$ حلول الجملة:

Discuss according to the value of the intermediate $a \in \mathbb{R}$ solutions to the system:

$$\begin{cases} 3x & +y & -z & = & 1 \\ x & -2y & +2z & = & a \\ x & +y & -z & = & 1 \end{cases}$$

Solution - الحـــل

محدد الجملة هو:

The determinant of the system is

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

معدوم ما يدل عن وجود عدد غير منته من الحلول أو لا يوجد حل ومنه باستعمال التحويلات التالية، و أولها تغيير ترتيب المعادلات حيث نبادل بين الأولى والثالثة نجد:

is equals to zero. What indicates the existence of an infinite number of solutions or that there is no solution, and then, using the following transformations, the first of which is changing the order of the equations, as we exchange between the first and the third one, we find:

$$\begin{cases} 3x & +y & -z & = & 1 \\ x & -2y & +2z & = & a \\ x & +y & -z & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 1 & L_1 \\ x & -2y & +2z & = & a & L_2 \\ 3x & +y & -z & = & 1 & L_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 1 & L_1 \\ & -3y & +3z & = & a-1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & -2y & +2z & = & -2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y & -z & = & \frac{1-a}{3} \\ y & -z & = & 1 \end{cases}$$

لكي الجملة تقبل عدد غير منته من الحلول يجب أن تكون قيم a:

In order for the system to accept an infinite number of solutions, the values of a must be:

$$\frac{1-a}{3} = 1 \Longrightarrow a = -2.$$

That is, in the case of $a = -2$, we find: أي في حالة $a = -2$ نجد:

$$\Longrightarrow \begin{cases} x & +y & -z & = & 1 \\ & y & -z & = & 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z \\ z = y - 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = y - 1 \end{cases}$$

then, the set of solutions are: ومنه مجموعة الحلول هي:

$$S = \{(0, y, y-1), y \in \mathbb{R}\}$$

If $a \neq -2$ then the system has no solution. إذا كان $a \neq -2$ فإن الجملة ليس لها حل.

القسم الثاني

الجزء الثاني : التحليل الرياضي 2

Part Two

Mathematical analysis 2

الفصل الرابع

النشر المحدود و حساب التكاملات

Limited Expansion and Integrals calculus

فهرس الفصل

1.4 النشر المحدود *Limited Expansion*

نأخذ مثال الدالة الأسية. يمكن إعطاء فكرة عن سلوك الدالة $f(x) = \exp x$ حول النقطة $x = 0$ بواسطة ظلها ، الذي تكون معادلته $y = 1 + x$. لقد قمنا بتقريب الرسم البياني بخط مستقيم.

We take the example of the exponential function. You can give an idea of the behavior of the function $f(x) = e^x$ around the point $x = 0$ using its shadow, which has the equation $y = 1 + x$. We have approximated the graph with a straight line.

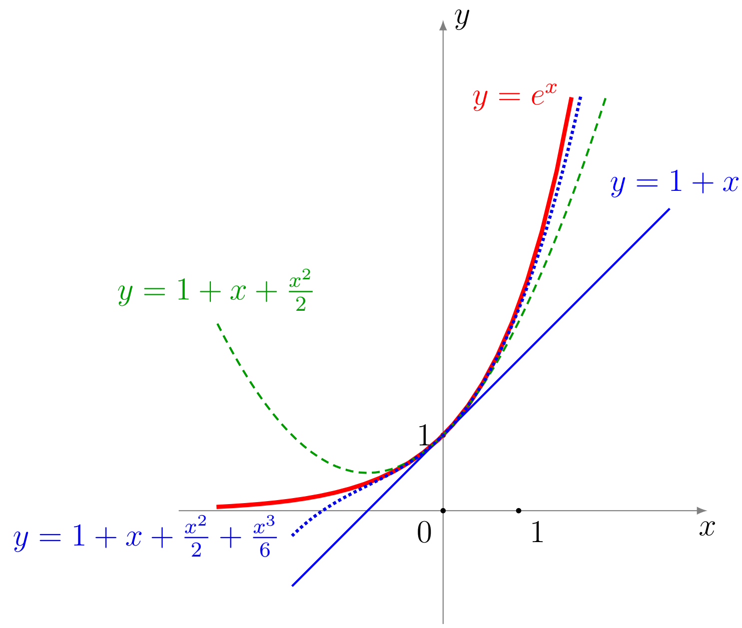
إذا أردنا أن نجد تقريب أفضل ، نأخذ مثلا المعادلة $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$، الرسم البياني للدالة f في جوار النقطة $x = 0$ هو مثل المعادلة $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. هذه المعادلة لها خاصية مميزة هي $g(x) = \exp x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ ثم $g(0) = 0$ ، $g'(0) = 0$ و $g''(0) = 0$. نعثر على معادلة القطع المكافئ يعني نجد تقريب من الدرجة 2 للدالة f.

If we want to find a better approximation, we can take, for example, the equation $y = c_0+c_1x+c_2x^2$. The graph of the function f near the point $x = 0$ is like the equation $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

This equation has a special property: $g(x) = \exp x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$, and then $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, and $g''(0) = 0$. We can find the equation of the equivalent parabola, meaning we find a second-degree approximation for the function f.

بالطبع إذا أردنا أن نكون أكثر دقة، فسنستمر بالتقريب باستعمال الدرجة الثالثة والرابعة …

Of course, if we wanted to be more precise, we would continue to approximate using the third and fourth degrees...



في هذا الجزء من الفصل، سوف نبحث على كثير الحدود من الدرجة n بالنسبة لأي دالة، التي تقترب من الدالة بشكل أفضل. النتائج صالحة فقط في جوار النقطة الثابتة x (غالبا ما تكون بجوار 0). سيتم حساب كثير الحدود هذا من المشتقات المتتالية عند النقطة التي تم النظر فيها.

In this part of the chapter, we will look for the nth-degree polynomial approximation for any function that provides a better fit. The results are valid only in the vicinity of a fixed point xx (often near 0). This polynomial approximation will be computed from the successive derivatives at the point under consideration.

1.1.4 صيغة تايلور Taylor formula

تسمح صيغة تايلور، التي سميت على اسم عالم الرياضيات بروك تايلور الذي أنشأها عام 1712، بتقريب دالة قابلة للتفاضل عدة مرات بجوار نقطة بواسطة كثير حدود، الذي تعتمد معاملاته فقط على مشتقات الدالة في هذه النقطة.

The Taylor formula, named after the mathematician Brook Taylor who developed it in 1712, allows for approximating a differentiable function multiple times around a point using power series, whose coefficients depend solely on the derivatives of the function at that point.

1.1.4 : Theorem - نظرية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الفئة $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ ولتكن $x_0, x \in I$ و منه لدينا

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function of the class $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ and let $x_0, x \in I$, then we have

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0), \end{aligned}$$

where حيث

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

1.1.4 : Example - مثال

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي:

Let the function f be defined as follows:

$$\begin{aligned} f :]-1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x) \end{aligned}$$

قابل للإشتقاق مالانهاية من المرات، سنقوم بحساب صيغ تايلور في النقطة 0 من المراتب الثلاثة الأولى.

Differentiable infinitely many times, we will compute the Taylor series at the point 0 up to the first three orders.

لدينا: $f(0) = 0$. ثم نحسب $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ نجد $f'(0) = 1$.

We have $f(0) = 0$. Then, when we calculate $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, we find that $f'(0) = 1$.

بعدها نحسب $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ نجد $f''(0) = -1$.

Afterwards, we calculate $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ and find that $f''(0) = -1$.

وأخيرا نحسب $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ ونجد $f^{(3)}(0) = 2$.

Finally, we calculate $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ and find that $f^{(3)}(0) = 2$.

نستطيع أن نثبت بالتراجع أن:

We can demonstrate by induction that:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

حيث يمكن حساب القيمة :

Where the value can be calculated:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

وبالتالي من أجل $n > 0$ لدينا :

Thus for $n > 0$ we have:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

بصفة عامة، كثير الحدود لتايلور للدالة f في النقطة 0 هو

In general, the Taylor polynomial of the function f at the point 0 is

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

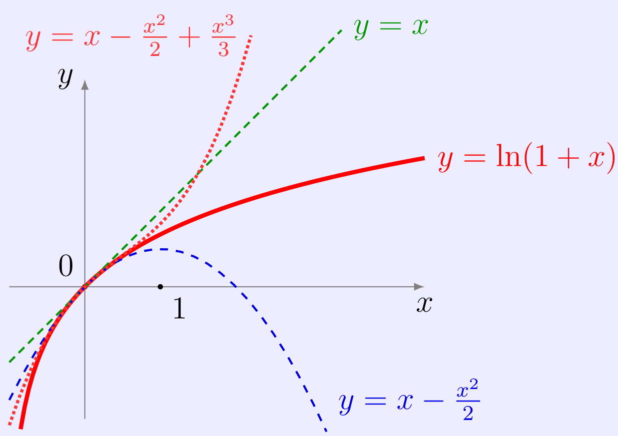
فيما يلي أول ثلاث كثيرات حدود لتايلور:

Here are the first three Taylor series expansions:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= x - \frac{x^2}{2}, \\ P_3(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

في الرسم البياني أسفله، تقترب الرسوم البيانية لكثيرات الحدود P_1 و P_2 و P_3 أكثر فأكثر من الرسم البياني لـ f وهذا فقط في جوار 0.

In the graph below, the plots of the Taylor series P_1, P_2, and P_3 approach the graph of f more and more closely, but only in the vicinity of 0.



2.1.4 صيغة ماك ـ لوران Mac-Laurent formula

2.1.4 : Theorem - نظرية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الفئة $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ ولتكن $x \in I$ و منه لدينا بتطبيق صيغة تايلور في النقطة $x_0 = 0$ نجد صيغة ماك ـ لوران:

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function of the class $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ and let $x \in I$ Then have, by applying Taylor's formula at the point $x_0 = 0$, we find the Mack-Laurent formula:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}\varepsilon(x).}$$

2.1.4 : Example - مثال

$$1)\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$2)\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$3)(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$3.1)\quad \alpha = -1 \Longrightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(n)$$

$$3.2)\quad \alpha = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1*3*5\ldots(2n-1)}{2*4*6\ldots 2n}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$4)e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$5)\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

3.1.4 النشر المحدود لبعض الدوال المألوفة Limited expansion of some common functions

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \ \bigstar$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) \ \bigstar$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1}) \quad \bigstar$$

$$sh(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad \bigstar$$

4.1.4 عمليات على النشر المحدود Operations on limited expansions

رأينا سابقا من صيغة طايلور وصيغة ماك - لوران أنه يمكن أن نغير النشر المحدود لدالة ما في النقطة $a \in \mathbb{R}$ إلى نشر محدود في النقطة 0 ولهذا سوف نشرح العمليات على النشر المحدود فقط في النقطة 0.

We saw previously from Taylor's and the Mac-Loran formula that we can change the limited expansion of a function at the point $a \in \mathbb{R}$ to a limited expansion at the point 0. Therefore, we will explain the operations on the limited expansion only at the point 0.

لتكن $n \in \mathbb{N}$ ولتكن f و g دالتين معرفتين عند 0 تقبلان في جوار 0 النشر المحدود من الدرجة n حيث:

Let $n \in \mathbb{N}$ and let f and g be functions defined at 0 that accept in the neighborhood of 0 the limited expansion of degree n where:

$$\begin{aligned} f(x) &= p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \\ &= P_n(x) + x^n \epsilon_1(x) \end{aligned}$$

and و

$$\begin{aligned} g(x) &= q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n + x^n \epsilon_2(x) \\ &= Q_n(x) + x^n \epsilon_2(x) \end{aligned}$$

1.1.4 : Proposition - قضيـة

- $f+g$ يقبل نشر محدود من الدرجة n عند 0 ويمثل مجموع نشري الحدود للدالتين f و g:

$f+g$ accepts a limited expansion of degree n at 0 and represents the sum of the two limited expansions of the functions f and g:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n \epsilon(x).$$

- fg يقبل نشر محدود من الدرجة n عند 0 ويمثل جداء نشري الحدود للدالتين f و g مع الإبقاء إلا على الحدود ذات الدرجة أقل من أو تساوي n:

fg accepts a limited expansion of degree n at 0 and represents the product of the limited expansion of the functions f and g, leaving only the terms with degree less than or equal to n:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = T_n(x) + x^n \epsilon(x)$$

حيث $T_n(x)$ كثير الحدود $(P_n(x) \cdot Q_n(x))$ المتوقف عند الدرجة n.

Where $T_n(x)$ is the polynomial $(P_n(x) \cdot Q_n(x))$ stopping at degree n.

- إذا كانت $g(0) = 0$ (أي $q_0 = 0$) فإن الدالة $f \circ g$ تقبل نشر محدود عند 0 من الدرجة n حيث جزء كثير الحدود المتوقف عند الدرجة n معرف بالتركيب $P(Q(x))$.

If $g(0) = 0$ (i.e. $q_0 = 0$) then the function $f \circ g$ accepts a limited expansion at 0 of degree n where the part of the polynomial stopping at degree n is defined by the structure $P(Q(x))$.

- إذا كان $q_0 \neq 0$ فإن لدينا:

If $q_0 \neq 0$ then we have:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{q_0} \frac{1}{1 + \frac{q_1}{q_0}x + \cdots + \frac{q_n}{q_0}x^n + \frac{x^n \epsilon_2(x)}{q_0}}.$$

- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن F تقبل نشر محدود عند a من الدرجة $n+1$ ويكتب :

If F is a primitive function of the function f, then F accepts a limited expansion at a of degree $n+1$ and is written:

$$F(x) = P_{n+1}(x-a) + (x-a)^{n+1}\eta(x)$$

حيث: $\lim_{x \to a} \eta(x) = 0$.

where: $\lim_{x \to a} \eta(x) = 0$.

3.1.4 : Example - مثال

حساب النشر المحدود للدالة $\arctan(x)$.

Calculate the limited expansion of the function $\arctan(x)$.

We know that: نعلم أن:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

We set: نضع

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

and $F(x) = \arctan(x)$ *and we write:* و $F(x) = \arctan(x)$ و نكتب:

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + x^{2n}\epsilon(x).$$

because $\arctan(0) = 0$, *then:* ولأن $\arctan(0) = 0$ فإن:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + x^{2n+1}\epsilon(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

4.1.4 : Example - مثال

- النشر المحدود للدالة $\tan x$ عند 0 من الرتبة 5.

The limited expansion of the function $\tan x$ *at* 0 *is of order* 5.

Firstly: أولا:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x).$$

On the other hand من جهة أخرى

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x) = 1 + u$$

we set نضع

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x).$$

نحتاج في الحساب u^2 و u^3 :

In the calculation we need u^2 and u^3:

$$u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$$

ثم

then

$$u^3 = x^5\epsilon(x).$$

وبالتالي:

so:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x).
\end{aligned}$$

في الأخير

Finely

$$\begin{aligned}
\tan x &= \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x).
\end{aligned}$$

- النشر المحدود للدالة $\frac{1+x}{2+x}$ عند 0 من الرتبة 4.

The limited expansion of the function $\frac{1+x}{2+x}$ at 0 of order 4.

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{2+x} &= (1+x)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(1+x)\left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{32} + o(x^4),
\end{aligned}$$

5.1.4 : Example - مثال

حساب النشر المحدود للدالة $h(x) = \sin\left(\ln(1+x)\right)$ عند 0 من الرتبة 3.

Calculate the limited expansion of the function $h(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ *at* 0 *of order* 3.

- نضع $f(u) = \sin u$ و $g(x) = \ln(1+x)$ ومنه:

We set $f(u) = \sin u$ *and* $g(x) = \ln(1+x)$, *from which:*

$$f \circ g(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big) \quad \text{و} \quad g(0) = 0.$$

- نكتب النشر المحدودمن الرتبة 3 للدالة

We write the limited expansion of order 3 *for the function*

$$f(u) = \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$$

for u *in the vicinity of* 0. — من أجل u في جوار 0.

We set — نضع

$$u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$$

for x *in the vicinity of* 0. — من أجل x في جوار 0.

- نحسب u^2:

We calculate u^2:

$$u^2 = \big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\big)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$$

and u^3 : — و u^3 :

$$u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x).$$

then: — ومنه:

$$\begin{aligned} h(x) &= f \circ g(x) = f(u) \\ &= u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

2.4 الدالة الأصلية *Primitive functions*

1.2.4 : Definition - تعريف

لتكن $I=[a,b]$ مجال في $\mathbb{R}$ والتكن f دالة حيث :

Let $I=[a,b]$ is a non-empty open interval in $\mathbb{R}$ and let the function $f: I \to \mathbb{R}$.

نقول أن F دالة أصلية للدالة f على I حيث :

We call F a primitive function of f on I such that:

$$F: I \to \mathbb{R}$$

إذا تحقق ما يلي:

satisfying:

1- F قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح I.

F can be derived in the open interval I.

2-

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

3.2.4 : Theorem - نظرية

إذا كانت F دالة أصلية للدالة $f: I \to \mathbb{R}$ على I فإن F مستمرة على I.

If F is a primitive function of $f: I \to \mathbb{R}$ on I, then F is continuous on I.

4.2.4 : Theorem - نظرية

لتكن الدالة $f: I \to \mathbb{R}$ حيث f تقبل دالة أصلية على I

Let $f: I \to \mathbb{R}$ has a primitive function on I. Then :

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي

the set of primitive functions of f is:

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\},$$

حيث F دالة أصلية خاصة للدالة f.

where, F is a primitive function of f.

All primitive functions of f are obtained by shifting any primitive function of f by a constant.

نرمز بـ $\int f(t)dt$ للدالة الأصلية للدالة f ونكتب:

We denote by $\int f(t)dt$ the primitive function of f and we write:

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

1.2.4 التكامل المحدود Definite integral

هناك نوعان من التكاملات هما: التكاملات المحدودة والتكاملات غير المحدودة.

There are two types of integrals: definite integrals and indefinite integrals.

لتكن الدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ و المستمرة على المجال $[a, b]$ حيث $b \geq a$.

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ the continues function on $[a, b]$ such that $b \geq a$.

يمكن تعريف التكامل بطريقة أخرى أكثر استعمالا في ايجاد قيم ثابتة للتكاملات من خلال النظرية التالية:

Integration can be defined in another way that is more used to find constant values for the integrals through following theorem:

نظرية - Theorem : 5.2.4

لتكن الدالة $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ المعرفة

Let $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ be the function defined as:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

هي دالة أصلية للدالة f يعني أن الدالة F قابلة للإشتقاق وتحقق :

a primitive function of f means that F derivable and satisfying :

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b].$$

2.2.4 : Definition - تعريف

نسمي التكامل المحدود للدالة f العدد الحقيقي الذي يعبر على المساحة المحصورة بمنحنى الدالة $f(x)$ من النقطة ذات الفاصلة $x = a$ إلى النقطة ذات الفاصلة $x = b$، الذي نرمز له بالرمز :

The definite integral of f is a number which represents the area under the curve $f(x)$ from $x = a$ to $x = b$ denoted by:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ حيث F هي الدالة الأصلية للدالة f و نكتب

The real number $F(b) - F(a)$ where F the primitive function of f and we write:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

6.2.4 : Example - مثال

Let's calculate the following integrals: لنحسب التكاملات التالية:

1− من أجل $f(x) = e^x$ لتكن $F(x) = e^x$ دالة أصلية لها، ومنه

For $f(x) = e^x$ let $F(x) = e^x$ be its primitive function, then

$$\int_0^1 e^x\, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2− من أجل $g(x) = x^2$ لتكن $G(x) = \frac{x^3}{3}$ دالة أصلية لها، ومنه

For $g(x) = x^2$ let $G(x) = \frac{x^3}{3}$ be its primitive function, then

$$\int_0^1 x^2\, dx = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$

−3

$$\int_a^x \cos t \, dt = \big[\sin t\big]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$$

دالة أصلية للدالة $\cos x$.

is a primitive function of $\cos x$.

−4 إذا كانت دالة فردية تكون دالتها الأصلية دالة زوجية (نبرهن لاحقا) ونستنتج أن :

If the function is odd, then its primitive function is be an even function (proved later).

We conclude that:

$$\int_{-a}^{a} f(t) \, dt = 0.$$

3.4 Properties of integrals خواص التكاملات

الخصائص الرئيسية الثلاثة لحساب التكامل هي علاقة شال، إيجابية و خطية التكاملات.

The three main properties to integral calculus are the relation Chasles, positivity and linearity of integral.

1.3.4 Chasles relation علاقة شال

2.3.4 : Proposition - قضيـة

لتكن $a < c < b$. إذا كان f دالة قابلة للتكامل على $[a, c]$ و $[c, b]$ ، عندها تكون f قابلة للتكامل على $[a, b]$.

Let $a < c < b$. *If* f *integrable on* $[a, c]$ *and* $[c, b]$ *then* f *integrable on* $[a, b]$.

and we have: ولدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

We have the following proprieties, for $a = b$: لدينا الخاصية التالية من أجل $a = b$:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

and for $a < b$: و من أجل $a < b$:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

7.3.4 : Example - مثال

We have: لدينا:

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}\\ \int_3^1 x^2dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^1 = \frac{1}{3} - \frac{27}{3} = -\frac{26}{3}\end{aligned}$$

$$\int_1^3 x^2dx = -\int_3^1 x^2dx.$$

2.3.4 Positivity of integration إيجابية التكامل

3.3.4 : Proposition - قضية

ليكن $a \leq b$ عددين حقيقيين، f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a, b]$.

Let $a \leq b$ two real numbers, f and g two functions have a primitive functions on $[a, b]$.

If $f \leq g$ then: إذا كان $f \leq g$ فإن

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

على وجه الخصوص ، يكون تكامل الدالة الموجبة إيجابيا:

In particular, the integral of a positive function is positive:

If $f \geq 0$ then: إذا كانت $f \geq 0$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

3.3.4 Linearity of integration خطية التكامل

4.3.4 : Proposition - قضيــة

لتكن f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a,b]$

Let f and g two functions have a primitive on $[a,b]$

1- و منه $f+g$ دالة قابلة للتكامل و

then $f+g$ a function integrable and

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2- من أجل كل عدد حقيقي λ الدالة λf هي قابلة للتكامل و لدينا

For all real number λ the function λf is integrable and we have:

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

من خلال هاتين النقطتين الأوليتين لدينا خطية التكامل:

From these first two points we have the linearity of integration:

For all real numbers λ and μ we have: من أجل كل عدد حقيقي λ و μ لدينا:

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

1.3.4 : Remark - ملاحظة

1) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a,b]$ فإن في معظم الأحيان

If f and g are integrable functions on $[a,b]$ then most of the time we have:

$$\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

2) إذا كانت f دالة قابلة للتكامل على المجال $[a,b]$ فإن $|f|$ دالة قابلة للتكامل على المجال $[a,b]$ أيضا و لدينا:

If f is an integrable function on $[a,b]$ then $|f|$ is also an integrable function on $[a,b]$

and we have:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

8.3.4 : Example - مثال

We have: لدينا:

$$\int_0^1 \left(7x^2 - e^x\right)\,dx = 7\int_0^1 x^2\,dx \;-\; \int_0^1 e^x\,dx = 7\frac{1}{3} \;-\; (e-1) = \frac{10}{3} - e$$

Using the calculations we saw earlier, we find: باستخدام الحسابات التي رأيناها سابقا نجد:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

and و

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

9.3.4 : Example - مثال

Let ليكن

$$I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx$$

Let's prove that $I_n \to 0$ *for* $n \to +\infty$. لنثبت أن $I_n \to 0$ لما $n \to +\infty$.

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx\right| \leq \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\,dx \leq \int_1^n \frac{1}{1+x^n}\,dx \leq \int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx$$

It remains only for us to calculate this last integral يبقى فقط حساب هذا التكامل الأخير

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^n x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^n = \frac{n^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

لأن $n^{-n+1} \to 0$ و $\frac{1}{-n+1} \to 0$ لما $n \to +\infty$.

because $n^{-n+1} \to 0$ *and* $\frac{1}{-n+1} \to 0$ *for* $n \to +\infty$.

2.3.4 : Remark - ملاحظة

نلاحظ أنه حتى و لو كانت $f \cdot g$ قابلة للتكامل فإنه على العموم

We note that even if $f \cdot g$ *is an integrable function, in general we have:*

$$\int_a^b (fg)(x)dx \neq \Big(\int_a^b f(x)dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)dx\Big).$$

على سبيل المثال، لتكن الدالة f و g المعرفتين كمايلي:

For example, let the functions f *and* g *be defined as follows:*

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

و

and

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

و منه $f(x) \cdot g(x) = 0$ من أجل كل $x \in [0,1]$، إذن:

Hence $f(x) \cdot g(x) = 0$ *for each* $x \in [0,1]$, *then:*

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$$

رغم أن

although

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2} \quad and \quad \int_0^1 g(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

4.4 *Primitive of usual functions* تكامل بعض الدوال المألوفة

$\int e^x dx = e^x + c$ on على $\mathbb{R}$	
$\int \cos x dx = \sin x + c$ on على $\mathbb{R}$	
$\int \sin x dx = -\cos x + c$ on على $\mathbb{R}$	
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ، $(n \in \mathbb{N})$ on على $\mathbb{R}$	
$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ ، $(\alpha \in \mathbb{R}_{\{-1\}})$ on على $]0, +\infty[$	
$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$ on على $]0, +\infty[$ أو $]-\infty, 0[$	
$\int shx\ dx = chx + c$، $\int chx\ dx = shx + c$ on على $\mathbb{R}$	
$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$ on على $\mathbb{R}$	
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \dfrac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$ on على $]-1, 1[$	
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} Argsh\,(x) + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases}$ on على $\mathbb{R}$	
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} Argch\,(x) + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases}$ on على $x \in]1, +\infty[$	

5.4 *Integration methods* طرق التكامل

يقوم حساب التكامل على إيجاد التابع الأصلي للدالة التي نريد القيام بمكاملتها. وقد عرض غوتفريد فيلهيلم لايبنتز، في 13 نوفمبر 1675، أول عملية تكامل لحساب المساحة. وقد أسس لايبنتز علم التفاضل والتكامل الرياضياتي بشكل مستقل عن إسحاق نيوتن كما أن رموزه الرياضياتية ما زالت تستخدم بشكل شائع منذ أن تم نشرها والتعريف بها. ويوجد عدة طرق للتكامل منها: التكامل بالتجزئة، التكامل بالتعويض، التكامل بتغيير المتغير، ...

Integration is based on finding the primitive function of the function we want to integrate. On November 13, 1675, Gottfried Wilhelm Leibniz demonstrated the first integral for calculating area. Leibniz established the mathematical calculus independently of Isaac Newton, and his mathematical symbols are still in common use since they were first published. There are several methods of integration, including: integration by parts, integration by substitution, integration by changing the variable, ...

1.5.4 Integration per partes التكامل بالتجزئة

6.5.4 : Theorem - نظرية

لتكن u و v دالتين من الفئة $\mathcal{C}^1$ المعرفتين على المجال $[a,b]$ فإن :

Let u and v two functions of the class $\mathcal{C}^1$ defined on $[a,b]$, then :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

صيغة التكامل بالتجزئة للدالة الأصلية هي نفسها ولكن بدون حدود:

The formula for the fractional integral for the primitive function is the same but without bounds:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = [uv] - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

10.5.4 : Example - مثال

To calculate the integral — لحساب التكامل

$$\int_0^1 xe^x\,dx$$

We put $u(x) = x$ and $v'(x) = e^x$. — نضع $u(x) = x$ و $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 1$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$

We know that the function $u'(x) = 1$ is the derivative of the function $u(x)$

و الدالة $v(x) = e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة v'

and the function $v(x) = e^x$ is the primitive function of v'

و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

by using the integration by parts formula we find:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx \\
&= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx \\
&= (1\cdot e^1 - 0\cdot e^0) - [e^x]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

11.5.4 : Example - مثال

To calculate the integral لحساب التكامل

$$\int_1^e x\ln x\,dx.$$

نضع هذه المرة $u(x) = \ln x$ و $v'(x) =$.

This time we put $u(x) = \ln x$ and $v'(x) = a$.

و منه الدالة $u' = \dfrac{1}{x}$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v = \frac{x^2}{2}$ هي الدالة الأصلية للدالة v'

The function $u' = \dfrac{1}{x}$ is the derivative of $u(x)$ and the function $v = \frac{x^2}{2}$ is the primitive of v'.

و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

by using the integration by parts formula we find:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x\cdot x\,dx = \int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v = \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,dx \\
= \left(\ln e\frac{e^2}{2} - \ln 1\frac{1^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.
\end{aligned}$$

12.5.4 : Example - مثال

To calculate the integral لحساب التكامل

$$\int \arcsin x\,dx$$

لإيجاد دالة أصلية للدالة $\arcsin(x)$

to finds a primitive function of the $\arcsin(x)$ *function*

نجعلها من شكل جداء حيث نضع $u(x) = \arcsin(x)$ و $v'(x) = 1$،

we make it in the form of a product, we put $u(x) = \arcsin(x)$ *and* $v'(x) = 1$,

حيث لدينا $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و $v(x) = x$،

where we have $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *and* $v(x) = x$,

ثم نطبق صيغة التكامل بالتجزئة فنجد

then we use the integration by parts formula we find:

$$\begin{aligned}
\int 1 \cdot \arcsin(x)dx &= [x\arcsin(x)] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= [x\arcsin(x)] - \left[-\sqrt{1-x^2}\right] \\
&= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c.
\end{aligned}$$

13.5.4 : Example - مثال

To calculate the integral حساب التكامل

$$\int x^2 e^x dx.$$

نضع $u(x) = x^2$ و $v'(x) = e^x$.

we put $u(x) = x^2$ *and* $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 2x$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$

We know that the function $u'(x) = 2x$ *is the derivative of* $u(x)$

و الدالة $v(x) = e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة $v'(x)$

and $v(x) = e^x$ *is the primitive function of* $v'(x)$

و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

and by using the integration by parts formula we find:

$$\int x^2 e^x\,dx = \left[x^2 e^x\right] - 2\int x e^x\,dx$$

نعيد التكامل بالتجزئة للمرة الثانية على الجزء الثاني من المساواة السابقة نجد:

Re-integrating by parts for the second time on the second part of the previous equations, *we find:*

$$\int xe^x\,dx = [xe^x] - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + c,$$

Finally we find في الأخير نجد

$$\int x^2e^x\,dx = (x^2-2x+2)e^x + c.$$

2.5.4 التكامل بتغيير المتعير Change of variables

7.5.4 : Theorem - نظرية

لتكن f دالة معرفة على المجال $I=[a,b]$ و ليكن التطبيق $\varphi : J \to I$ من الفئة $\mathcal{C}^1$.

Let f be a function defined on $I=[a,b]$ and let the mapping $\varphi : J \to I$ be in class $\mathcal{C}^1$.

for all $a,b \in J$ we have: من أجل كل $a,b \in J$ لدينا:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن $F\circ\varphi$ هي الدالة الأصلية للدالة $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

if F is a primitive function of f then $F\circ\varphi$ is the primitive function of $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

in another way بصفة أخرى

$$\left(\int f(x)\,dx\right)\circ\varphi = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

أي أن الدالة الأصلية للدالة $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ تنتج من تركيب كل من الدالة f و φ.

that is, the primitive function $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ results from the combination of f and φ.

العبارة $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ تمثل فعلا تغيير للمتغير،

the statement $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ is actually a change of the variable,

or in a simplified form we put أو بصيغة مبسطة نضع

$$x = \varphi(t)$$

after derivation, we find ومنه نجد بعدها بالإشتقاق

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$$

i.e. أي

$$dx = \varphi'(t)\ dt$$

what it gives us: ما يعطينا :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

14.5.4 : Example - مثال

Calculate the integral حساب التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$$

by placing بوضع

$$\sin(x) = t \Longrightarrow \sin(x)' = \cos(x) = dt$$

ومنه نتغير حدود التكامل من x الى t كما يلي

Hence, the bounds of integration change from x to t as follows

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow t = \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

from it we find ومنه نجد

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx &= \int_0^1 t^2 dt \\ &= \left.\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

6.4 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 4*

تمرين رقم – 1 – Exercise N°

أحسب التكاملات التالية عن طريق التكامل بالتجزئة.

Compute the following integrals by integration by parts.

$$1)\int x^2 \ln x\, dx. \qquad 2)\int x \arctan x dx.$$
$$3)\int \ln x dx \quad \textit{then} \quad \int (\ln x)^2\, dx. \qquad 4)\int \cos x \exp x\, dx.$$

الحل - Solution

- $\int x^2 \ln x\, dx$

لنكامل بالتجزئة حيث $u = \ln x$ و $v' = x^2$.

Let's integrate by parts where we put $u = \ln x$ and $v' = x^2$.

ومنه $u' = \frac{1}{x}$ و $v = \frac{x^3}{3}$.

then $u' = \frac{1}{x}$ and $v = \frac{x^3}{3}$.

$$\begin{aligned}\int \ln x \cdot x^2\, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v = \left[\ln x \cdot \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3}\, dx \\ &= \left[\ln x \cdot \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c.\end{aligned}$$

- $\int x \arctan x\, dx$

لنكامل بالتجزئة حيث $u = \arctan x$ و $v' = x$. ومنه $u' = \frac{1}{1+x^2}$ و $v = \frac{x^2}{2}$.

Let's integrate by parts where $u = \arctan x$ and $v' = x$. These include $u' = \frac{1}{1+x^2}$ and $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\begin{aligned}\int \arctan x \cdot x\, dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[\arctan x \cdot \frac{x^2}{2}\right] - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{2}\, dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\arctan x \cdot \frac{x^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + c \\
&= \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x + c
\end{aligned}$$

- $\int \ln x\,dx$ then $\int (\ln x)^2\,dx$

من أجل التكامل : $\int \ln x\,dx$ **بإستعمال التكامل بالتجزئة حيث** $u = \ln x$ **و** $v' = 1$. **ومنه** $u' = \frac{1}{x}$ **و** $v = x$.

In order to integrate: $\int \ln x\,dx$ using integration by parts, where $u = \ln x$ and $v' = 1$. Then $u' = \frac{1}{x}$ and $v = x$.

$$\begin{aligned}
\int \ln x\,dx = \int uv' &= [uv] - \int u'v \\
&= [\ln x \cdot x] - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx \\
&= [\ln x \cdot x] - \int 1\,dx \\
&= x\ln x - x + c
\end{aligned}$$

نستعمل التكامل بالتجزئة لحساب $\int (\ln x)^2\,dx$ **حيث** $u = (\ln x)^2$ **و** $v' = 1$. **ومنه** $u' = 2\frac{1}{x}\ln x$ **و** $v = x$.

We use integration by parts to calculate $\int (\ln x)^2\,dx$ where $u = (\ln x)^2$ and $v' = 1$. Of which $u' = 2\frac{1}{x}\ln x$ and $v = x$.

$$\begin{aligned}
\int (\ln x)^2\,dx = \int uv' &= [uv] - \int u'v \\
&= \left[x(\ln x)^2\right] - 2\int \ln x\,dx \\
&= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c
\end{aligned}$$

للحصول على السطر الأخير ، استخدمنا التكامل المحسوب سابقا.

To get the last line, we used the previously computed integral.

- نضع $I = \int \cos x \exp x \, dx$.

نستعمل التكامل بالتجزئة حيث $u = \exp x$ و $v' = \cos x$. ومنه $u' = \exp x$ و $v = \sin x$. إذن:

We use the integral by parts where $u = \exp x$ and $v' = \cos x$. Then, $u' = \exp x$ and $v = \sin x$. So:

$$I = \int \cos x \exp x \, dx = \big[\sin x \exp x\big] - \int \sin x \exp x \, dx$$

إذا فرضنا أن: $J = \int \sin x \exp x \, dx$ فإننا نحصل على:

If we assume that: $J = \int \sin x \exp x \, dx$, then we get:

$$I = \big[\sin x \exp x\big] - J$$

من أجل حساب J نعيد استعمال التكامل بالتجزئة مرة أخرى مع $u = \exp x$ و $v' = \sin x$. هذا يعطينا:

In order to calculate J we use integration by parts again with $u = \exp x$ and $v' = \sin x$. This gives us:

$$J = \int \sin x \exp x \, dx = \big[-\cos x \exp x\big] - \int -\cos x \exp x \, dx = \big[-\cos x \exp x\big] + I$$

إذن لدينا معادلة ثانية:

So we have a second equation:

$$J = \big[-\cos x \exp x\big] + I$$

نعوض J بقيمتها في المعادلة السابقة نجد:

Substituting J for its value in the previous equation, we find:

$$I = \big[\sin x \exp x\big] - J = \big[\sin x \exp x\big] - \big[-\cos x \exp x\big] - I$$

حيث

where

$$2I = \left[\sin x \exp x\right] + \left[\cos x \exp x\right]$$

وهذا ما يسمح لنا بحساب التكامل:

This allows us to calculate the integral:

$$I = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\exp x + c.$$

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

أحسب التكاملات التالية، مع تحديد مجال تعريف التكامل إذا لزم الأمر:

Calculate the following integrals, specifying the integral domain definition if is necessary:

$$1) \int \sin^8 x \cos^3 x dx. \quad 2) \int \cos^4 x dx. \quad 3) \int \cos^{2003} x \sin x dx.$$
$$4) \int \frac{1}{\sin x} dx. \quad 5) \int \frac{1}{\cos x} dx. \quad 6) \int \frac{1}{7 + \tan x} dx.$$

Solution - الحــل

- التكامل معرف على $\mathbb{R}$.

The integral is defined at $\mathbb{R}$.

$$\int \sin^8 x \cos^3 x dx = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c$$

- التكامل معرف على $\mathbb{R}$.

The integral is defined at $\mathbb{R}$.

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c$$

- التكامل معرف على $\mathbb{R}$.

The integral is defined at $\mathbb{R}$.

$$\int \cos^{2003} x \sin x dx = -\frac{1}{2004}\cos^{2004} x + c$$

- التكامل معرف على $]k\pi, (k+1)\pi[$

The integral is defined at $]k\pi, (k+1)\pi[$.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

(تغيير المتغير $u = \cos x$ أو $u = \tan\frac{x}{2}$).

(Change the variable $u = \cos x$ or $u = \tan\frac{x}{2}$).

- التكامل معرف على $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

The integral is defined at $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

(تغيير المتغير $u=\sin x$ أو $u=\tan\frac{x}{2}$).

(Change the variable $u=\sin x$ or $u=\tan\frac{x}{2}$).

- التكامل معرف على المجال $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7)+k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in Z\right\}$

The integral is defined at $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7)+k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in Z\right\}$

$$\int \frac{1}{7+\tan x}dx = \frac{7}{50}x + \frac{1}{50}\ln|\tan x+7| + \frac{1}{50}\ln|\cos x| + c$$

(تغيير المتغير $u=\tan x$).

(Change the variable $u=\tan x$).

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

أحسب التكاملات التالية عن طريق تغيير المتغير.

Calculate the following integrals by changing the variable.

$$1)\int (\cos x)^{1234}\sin x\,dx. \quad 2)\int \frac{1}{x\ln x}\,dx.$$
$$3)\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx. \quad 4)\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx.$$

Solution - الحــل

- $\int(\cos x)^{1234}\sin x\,dx$

نضع تغيير المتغير $u=\cos x$ لدينا $x=\arccos u$ و $du=-\sin x\,dx$ نحصل على

We put the variable change $u=\cos x$ we have $x=\arccos u$ and $du=-\sin x\,dx$ we get:

$$\int(\cos x)^{1234}\sin x\,dx = \int u^{1234}(-du) = -\frac{1}{1235}u^{1235} + c = -\frac{1}{1235}(\cos x)^{1235} + c$$

This primitive function is defined at $\mathbb{R}$.

هذه الدالة الأصلية معرفة على $\mathbb{R}$.

- $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

ليكن تغيير المتغير $u=\ln x$ لدينا $x=\exp u$ و $du=\frac{dx}{x}$ نكتب :

Let the change of variable $u=\ln x$, then we have $x=\exp u$ and $du=\frac{dx}{x}$ we write:

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx=\int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x}=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+c=\ln|\ln x|+c$$

هذه الدالة الأصلية معرفة على $]0,1[$ أو على $]1,+\infty[$ (الثابت قد يكون مختلف بالنسبة للمجالين).

This primitive function is defined as $]0,1[$ or $]1,+\infty[$ (the constant may be different for the two intervals).

- $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$

ليكن تغيير المتغير $u=\exp x$. ومنه $x=\ln u$ و $du=\exp x\,dx$ الذي يكتب أيضا $dx=\frac{du}{u}$.

Let the variable be changed to $u=\exp x$. Including $x=\ln u$ and $du=\exp x\,dx$ which also writes $dx=\frac{du}{u}$.

$$\int \frac{dx}{3+\exp(-x)}=\int \frac{1}{3+\frac{1}{u}}\left(\frac{du}{u}\right)=\int \frac{du}{3u+1}=\frac{1}{3}\ln|3u+1|+c=\frac{1}{3}\ln(3\exp x+1)+c$$

هذه الدالة الأصلية معرفة على $\mathbb{R}$.

This primitive function is defined at $\mathbb{R}$.

- $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

الغرض من تغيير المتغير هو اختزاله إلى شيء معروف. لدينا هنا كسر بجذر تربيعي في المقام وتحت الجذر كثير حدود من الدرجة 2. ما نعرفه هو كيف نكامل

The purposed of changing a variable is to reduce it to something known. Here we have a fraction with a square root in the denominator and under the root a polynomial of degree 2. What we know is how to integrate

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+c,$$

لأننا نعرف مشتقة الدالة $\arcsin(t)$ وهو

Because we know the derivative of the function $\arcsin(t)$ which is

$$\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

لذلك سنحاول العودة إليه. لنحاول كتابة ما تحت الجذر $4x - x^2$ على الشكل

We will try to get back to it. Let's try to write under the radical $4x - x^2$ in the form

$$1 - t^2 : 4x - x^2 = 4 - (x-2)^2 = 4\left(1 - (\frac{1}{2}x - 1)^2\right).$$

لذلك من الطبيعي تجربة تغيير المتغير $u = \frac{1}{2}x - 1$ من أجله يكون: $4x - x^2 = 4(1-u^2)$ و $dx = 2du$.

So it is natural to experiment with changing the variable $u = \frac{1}{2}x - 1$ for it is: $4x - x^2 = 4(1-u^2)$ and $dx = 2du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{2du}{\sqrt{4(1-u^2)}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$$

الدالة $\arcsin u$ معرفة وقابلة للإشتقاق على $u \in]-1,1[$ هذه الدالة الأصلية معرفة على $x \in]0,4[$.

The function $\arcsin u$ is defined and is differentiable on $u \in]-1,1[$. This primitive function is defined on $x \in]0,4[$.

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

أحسب مساحة المنطقة المحددة بمنحنيات المعادلات

Calculate the area of the region bounded by the curves of the equations

$$y = \frac{x^2}{2} \textit{ and } \; y = \frac{1}{1+x^2}.$$

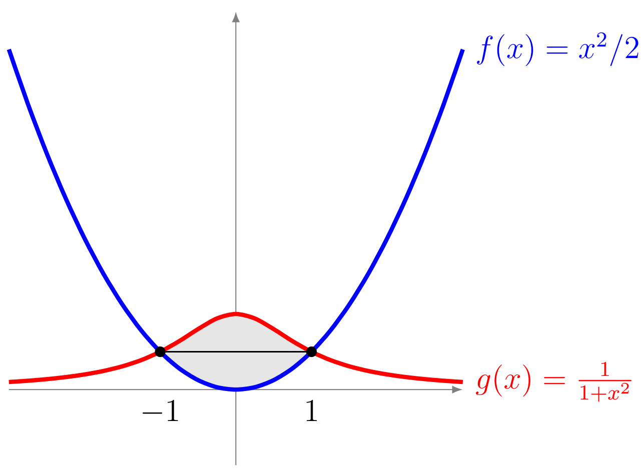
Solution - الحــل

منحنى الدالة $y = x^2/2$ هو قطع مكافئ ، و منحنى الدالة $y = \frac{1}{1+x^2}$ منحنى الجرس. برسم الرسمين البيانيين. معا يحدد هذان المنحنيان المنطقة التي سنقوم بحسابها.

The graph of the function $y = x^2/2$ is a parabola, and the graph of the function $y = \frac{1}{1+x^2}$ is a bell curve. Draw the two graphs. Together, these two curves define the area that we are going to calculate.

بادئ ذي بدء ، يتقاطع هذان المنحنيان عند نقاط الإحداثية $x = +1$ و $x = -1$: يمكن تخمين ذلك على الرسم البياني ثم التحقق منه عن طريق حل المعادلة $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$.

Firstly, these two curves intersect at the coordinate points $x = +1$ and $x = -1$: this can be guessed on the graph and then verified by solving the equation $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$.



We will calculate two areas:

سنحسب مساحتين:

- **المساحة $\mathcal{A}_1$ للمنطقة تحت القطع المكافئ ، وفوق محور الإحداثية وبين سطور المعادلة $(x = -1)$ و $(x = +1)$. ومنه :**

The $\mathcal{A}_1$ area of the region under the parabola, above the ordinate axis and between the lines of the equation $(x = -1)$ and $(x = +1)$. Including:

$$\mathcal{A}_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{2}\, dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{3}.$$

- **المساحة $\mathcal{A}_2$للمنطقة الواقعة تحت الجرس ، وفوق محور الإحداثيات وبين خطوط المعادلة $(x = -1)$ و $(x = +1)$. ومنه:**

The area $\mathcal{A}_2$ for the area under the bell, above the ordinate axis and between the equation lines $(x = -1)$ and $(x = +1)$. Including:

$$\mathcal{A}_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan x]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2}.$$

- **المساحة $\mathcal{A}$ تحت الجرس وفوق القطع المكافئ تساوي:**

The area $\mathcal{A}$ under the bell and above the parabola is:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

حلل الكسور التالية ثم أوجد الدوال الأصلية.

Factorize the following fractions and then find the primitive functions.

1) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$. 2) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$. 3) $\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

4) $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$. 5) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$. 6) $\dfrac{1}{(x^2+2x-1)^2}$.

7) $\dfrac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}$. 8) $\dfrac{3x+1}{x^2-2x+10}$. 9) $\dfrac{1}{x^3+1}$.

Solution - الحــل

النتائج صالحة في كل مجال من مجموعة التعريف.

The results are valid in every interval of the definition set.

- **$\frac{1}{x^2+a^2}$ شكل بسيط ومنه الدالة الأصلية هي:**

A simple form of which the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + k.$$

- **$\frac{1}{(1+x^2)^2}$ شكل بسيط ومنه الدالة الأصلية هي:**

A simple form of which the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + k.$$

- يمكن كتابة:

We can write:

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}.$$

ومنه الدالة الأصلية هي:

Then, the primitive function is:

$$\int \frac{x^3}{x^2-4}dx = \frac{x^2}{2} + \ln(x^2-4)^2 + k.$$

- $\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{4}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$. الدالة الأصلية هي:

the primitive function is:

$$\int \frac{4x}{(x-2)^2}dx = 4\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + k.$$

- $\frac{1}{x^2+x+1}$ شكل شهير ومنه الدالة الأصلية هي:

A popular form, including the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k.$$

- لدينا التحليل التالي:

We have the following factorization:

$$\frac{1}{(x^2+2x-1)^2} = \frac{1}{8(x+1+\sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{2}}{16(x+1+\sqrt{2})} + \frac{1}{8(x+1-\sqrt{2})^2} + \frac{-\sqrt{2}}{16(x+1-\sqrt{2})}$$

. الدالة الأصلية هي:

the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x-1)^2} = -\frac{x+1}{4(x^2+2x-1)} + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{x+1+\sqrt{2}}{x+1-\sqrt{2}}\right| + k.$$

- $\frac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}$ من الشكل مشتق على الدالة ومنه الدالة الأصلية هي:

From the form is derived on the function, from which the original function is:

$$\int \frac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}dx = -\frac{3}{2(x^2-2x+10)} + \frac{2(x-1)}{9(x^2-2x+10)} + \frac{2}{27}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + k.$$

- $\frac{3x+1}{x^2-2x+10}$ من الشكل مشتق على الدالة ومنه الدالة الأصلية هي:

From the form is derived on the function, from which the original function is:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+10) + \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + k.$$

- يمكن كتابة:

We can write:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$

الدالة الأصلية هي:

the primitive function is:

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + k.$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

أحسب التكاملات للدوال الكسرية التالية.

Calculate the integrals for the following rational functions.

$$1)\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}. \quad 2)\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}. \quad 3)\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx.$$
$$4)\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}. \quad 5)\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}. \quad 6)\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}dx.$$

Solution - الحـــل

- $\frac{1}{x^2+2}$ مشتق شهير للدالة قوس الضل ومنه :

$\frac{1}{x^2+2}$ is a well-known derivative of the arctangent function, including:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

- لنحلل الكسر:

Let's decompose the fraction:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1}.$$

ثم نحسب التكامل:

Then we calculate the integral:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \ln 3.$$

- **لأن $2x+1$ هي مشتق الدالة x^2+x-3 فإن**

Because $2x+1$ is the derivative of the function x^2+x-3, then

$$\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \ln\left|x^2+x-3\right|\Big]_2^3 = \ln 3.$$

- **نستطيع تحليل الكسر بالشكل البسيط:**

We can analyze the fraction in the simplest way:

$$\frac{x}{x^4+16} = \frac{\sqrt{2}/8}{x^2-2x\sqrt{2}+4} - \frac{\sqrt{2}/8}{x^2+2x\sqrt{2}+4},$$

لكن الأبسط أن نضع تغيير للمتغير $x^2=u$. نجد:

But the simplest thing is to change the variable $x^2=u$. We find:

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{u^2+16} = \frac{\pi}{32}.$$

- **بالتحليل نجد:**

By factorization, we find:

$$\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}.$$

ومنه التكامل:

Then the integral:

$$\int \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}\right| + C$$

حيث

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{10}\ln(27/4).$$

- **بالتحليل نجد:**

By factorization, we find:

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

ومنه التكامل:

Then the integral:

$$\int \frac{4x^2}{x^4-1}dx = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\arctan x + C$$

where حيث

$$\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{7}\right).$$

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

أدرس قيم التكامل التالي

Study the values of the following integral

$$I_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}\,dx,$$

من أجل كل $n > 0$.

for every $n > 0$.

1– أثبت أن $0 \le I_{n+1} \le I_n$

Prove that $0 \le I_{n+1} \le I_n$

2– أثبت أن $I_n \le \ln\frac{n+1}{n}$ ثم استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Prove that $I_n \le \ln\frac{n+1}{n}$ *and then conclude that* $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3– أحسب قيمة التكامل

Calculate the value of the integration.

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

Solution - الحـــل

1– إثبات أن $0 \le I_{n+1} \le I_n$: من أجل كل $0 \le x \le 1$، لدينا $0 < x+n \le x+n+1$ و $\sin(\pi x) \ge 0$، ومنه ، نجد

Prove that $0 \le I_{n+1} \le I_n$: For every $0 \le x \le 1$, we have $0 < x+n \le x+n+1$ and $\sin(\pi x) \ge 0$, then we find

$$0 \le \frac{\sin(\pi x)}{x+n+1} \le \frac{\sin(\pi x)}{x+n}$$

بتطبيق خاصية إيجابية التكامل.

applying the property of positive integration.

2− **من خلال** $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ **لدينا**

Through $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ we have

$$\frac{\sin(\pi x)}{x+n} \leq \frac{1}{x+n}$$

نجد

we find

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n}\, dx = [\ln(x+n)]_0^1 = \ln\frac{n+1}{n} \to 0.$$

3− **حساب قيمة التكامل**

Calculate the value of integration

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

لنجري تكامل بالتجزئة، حيث نضع $u(x) = \dfrac{1}{x+n}$ **و** $v'(x) = \sin(\pi x)$ **ومنه** $u'(x) = -\dfrac{1}{(x+n)^2}$
و $v(x) = -\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)$ **نجد**

Let's do an integration by parts, where we put $u(x) = \dfrac{1}{x+n}$ and $v'(x) = \sin(\pi x)$ and from there $u'(x) = -\dfrac{1}{(x+n)^2}$ and $v(x) = -\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)$. We find

$$\begin{aligned} nI_n &= n\int_0^1 \frac{1}{x+n}\sin(\pi x)\, dx \\ &= -\frac{n}{\pi}\left[\frac{1}{x+n}\cos(\pi x)\right]_0^1 - \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\cos(\pi x)\, dx \\ &= \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n \end{aligned}$$

يبقى لنا إيجاد قيمة

It remains for us to find a value

$$J_n = \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{(x+n)^2}dx.$$

$$\left|\frac{n}{\pi}J_n\right| \leq \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{|\cos(\pi x)|}{(x+n)^2}\,dx \leq \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\,dx$$
$$= \frac{n}{\pi}\left[-\frac{1}{x+n}\right]_0^1 = \frac{n}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1} \to 0.$$

then ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n = \frac{2}{\pi}.$$

الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية $Differential\ equations$

فهرس الفصل

تعتبر المعادلات التفاضلية أحسن وسيلة لوصف معظم المسائل الهندسية والرياضية والعلمية على حد سواء، مثل وصف عمليات انتقال الحرارة أو سيلان الموائع، الحركة الموجية و الدوائر الإلكترونية و استخدامها في مسائل الهياكل الإنشائية للمادة أو الوصف الرياضي للتفاعلات الكيميائية.

Differential equations are the best way to describe most engineering, mathematical and scientific issues alike, such as describing heat transfer processes or fluid flow, wave motion and electronic circuits and using them in issues of the structural structures of matter or the mathematical description of chemical reactions.

1.5 مفاهيم أساسية *Basic concepts*

يتضمن هذا الفصل مجموعة من التعريفات والمفاهيم في المعادلات التفاضلية ، ومن أهم تلك المفاهيم :

This chapter includes a set of definitions and concepts in differential equations, the most important of which are:

1.1.5 : Definition - تعريف

المعادلة التفاضلية هي كل معادلة تحوي على تفاضلات أو مشتقات لتابع أو أكثر بالنسبة لمتحولات وهي من الشكل :

A differential equation is every equation that contains differentials or derivatives of one or more functions with respect to variables and is of the form:

$$(E) \qquad F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

1.1.5 : Example - مثال

$$\frac{dx}{dy}z + ydx = u$$

وتصنف المعادلة التفاضلية الى :

The differential equation is classified into:

1ـ معادلة تفاضلية عادية : هي معادلة تفاضلية تحوي على مشتقات أو تفاضلات عادية لتابع أو أكثر

Ordinary differential equation: It is a differential equation that contains derivatives or ordinary differentials of one or more variables.

2.1.5 : Example - مثال

$$ydx + xdy = e^z.$$

2ـ معادلة تفاضلية جزئية : هي معادلة تفاضلية تحوي على مشتقات أو تفاضلات جزئية لتابع أو أكثر

Partial differential equation: It is a differential equation that contains derivatives or partial differentials of one or more variables.

3.1.5 : Example - مثال

$$\frac{\partial x}{\partial y} = zx.$$

3ـ المعادلة التفاضلية العادية الخطية : هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة لكل من التابع أو التوابع ومشتقاتها و لا تحوي على جداءات لها .

For the linear ordinary differential equation: it is the equation that is linear with respect to each of the function(s) and their derivatives does not contain their products.

4ـ المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية : هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة للمشتقات الجزئية للتابع أو التوابع الموجودة.

Linear partial differential equation: It is the equation that is linear with respect to the partial derivatives of the existing function or functions.

1.1.5 : Remark - ملاحظة

1ـ ان مرتبة المعادلة هي مرتبة أعلى مشتق موجود فيها.

The order of an equation is the order of the highest derivative present in it.

2ـ ويمكن تحويل المعادلة التفاضلية من شكل لآخر لتسهيل حلها.

The differential equation can be converted from one form to another to facilitate its solution.

1.1.5 Order and degree الرتبة والدرجة

Order الرتبة

تعريف - Definition : 2.1.5

رتبة المعادلة التفاضلية : هو رتبة المشتق الأعلى (المعروف أيضا باسم المعامل التفاضلي) الموجود في المعادلة.

The order of a differential equation : is the order of the highest derivative (also known as differential coefficient) present in the equation.

مثال - Example : 4.1.5

$$\frac{dy}{dx} + y^3 = \cos(x)$$

يحتوي فقط على المشتق الأول $\frac{dy}{dx}$، أي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.

Contains only the first derivative $\frac{dy}{dx}$, which is a first order differential equation.

مثال - Example : 5.1.5

$$\frac{d^3x}{dx^3} + 3x\frac{dy}{dx} = e^y$$

في هذه المعادلة، رتبة أعلى مشتق هو 3، ومنه، هذه المعادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة.

In this equation, the order of the highest derivative is 3 hence, this is a third order differential equation.

الدرجة Degree

تعريف - Definition : 3.1.5

يتم تمثيل درجة المعادلة التفاضلية بقوة المشتق الأعلى رتبة في المعادلة التفاضلية المحددة.

The degree of the differential equation is represented by the power of the highest order derivative in the given differential equation.

يجب أن تكون المعادلة التفاضلية معادلة متعددة الحدود في المشتقات للدرجة المراد تحديدها.

The differential equation must be a polynomial equation in derivatives for the degree to be defined.

6.1.5 : Example - مثال

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\frac{d^2y}{d^2x}\right)^3 + y = \cos(x)$$

هنا، الأس لأعلى هو للمشتق من الرتبة 2 والمعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة متعددة الحدود في المشتقات. إذن فهي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية و الدرجة الثالثة.

Here, the up exponent is of the derivative of the highest order derivative is 2 and the given differential equation is a polynomial equation in derivatives.

So it is a Second Order Three Degree ordinary differential equation

2.1.5 الشرط الإبتدائي والنهائي

في المسائل المطلوب منك التحقق من حل المعادلة التفاضلية العادية، يمكنك أيضا أيجاد الثوابت الإختيارية الظاهرة في الحل العام للمعادلة، وذلك يتم عن طريق الشروط الإبتدائية التي تعطى في البداية .

In the problems you are required to check the solution of the ordinary differential equation, you can also find the optional constants that appear in the general solution to the equation, and this is done through the initial conditions that are given at the beginning.

وفي حال وجود حل عام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية مثلا، تحتوي على ثابتين أختياريين، يلزم لتحديد الثابتين شرطين إضافيين للمعادلة.

In the event that there is a general solution to a differential equation of the second order, for example, that contains two optional constants, two additional conditions for the equation are required to determine the constants.

إذا أعطى الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y(x_1) = y_1$، $y(x_2) = y_2$ كانت الشروط شروطا حدية ، وسميت المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية: مسألة القيمة الحدية .

If the two conditions are given at two different points $y(x_1) = y_1$ and $y(x_2) = y_2$, then the conditions are boundary conditions, and the differential equation is called in addition to the boundary conditions: the issue of value limitation.

2.5 حل المعادلات التفاضلية *Solving diff. equa's*

يمكن أن تكون المعادلة التفاضلية طريقة طبيعية جدا لوصف شيء ما. لكنها ليست مفيدة للغاية كما هي.

A Differential Equation can be a very natural way of describing something. But it is not very useful as it is.

نحن بحاجة لحلها!

We need to solve it!

نحلها عندما نجد الدالة y (أو مجموعة الدوال y) التي تحقق المعادلة، ومن ثم يمكن استخدامها بنجاح.

We solve it when we discover the function y (or set of functions y) that satisfies the equation, and then it can be used successfully.

4.2.5 : Definition - تعريف

نسمي الدالة $y = y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية:

We call the function $y = y(x)$ a solution to the differential equation:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n)$$

if — إذا كانت :

1- *is n times differentiable.* — 1ـ قابلة للأشتقاق n مرة .

2- *checks the differential equation i.e.:* — 2ـ تحقق المعادلة التفاضلية أي :

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$$

لهذا لنلقي نظرة على بعض الأنواع المختلفة من المعادلات التفاضلية وكيفية حلها.

So let's look at some different types of differential equations and how to solve them:

1.2.5 فصل المتغيرات Separation of Variables

فصل المتغيرات هي طريقة خاصة لحل بعض المعادلات التفاضلية،

Separation of variables is a special method to solve some differential equations,

متى يمكن استخدامها؟ When can i use it?

يمكن استخدام فصل المتغيرات عندما: يمكن نقل جميع المصطلحات y (بما في ذلك dy) إلى جانب واحد من المعادلة ، وكل مصطلحات x (بما في ذلك dx) إلى الجانب الآخر.

Separation of Variables can be used when: all the y terms (including dy) can be moved to one side of the equation, and all the x terms (including dx) to the other side.

7.2.5 : Example - مثال

في هذا المثال سوف نوضح مراحل حل معادلة تفاضلية بطريقة فصل المتغيرات.

In this example, we will explain the stages of solving a differential equation by separating the variables.

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

الخطوة 1: نفصل بين المتغيرات عن طريق تحريك كل حدود y إلى جانب واحد من المعادلة وكل حدود x إلى الجانب الآخر:

Step 1: Separate the variables by moving all the y terms to one side of the equation and all the x terms to the other side:

$$\frac{dy}{y} = kdx$$

الخطوة 2: نكامل طرفي المعادلة بشكل منفصل:

Step 2: Integrate both sides of the equation separately.

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdx \Longrightarrow \ln(y) + C = kx + D$$

نستخدم مثلا C كثابت التكامل. ونستخدم D للطرف الآخر ، لأنه ثابت مختلف.

C is the constant of integration. And we use D for the other, as it is a different constant.

الخطوة 3: التبسيط: يمكننا تحويل الثابتين إلى ثابت واحد $(a = D - C)$

Step 3 Simplify: We can roll the two constants into one $(a = D - C)$

$$\ln(y) = kx + a \Rightarrow y = ce^{kx}, \quad (c = e^a)$$

هذا النوع من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، تظهر في العديد من أمثلة الواقع الحقيقي.

This type of differential equations are of the first order, appearing in many real-world examples.

8.2.5 : Example - مثال

Solve the following differential equation: حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$xy^2dx + (1-x^2)dy = 0.$$

الحل : نقسم طرفي المعادلة على $y^2(1-x^2)$ فنحصل على :

Solution: We divide both sides of the equation by $y^2(1-x^2)$*, so we get:*

$$\frac{xdx}{1-x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0$$

والتي هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات وطريقة حلها تكون كمايلي : بتكامل الطرفين

Which is a differential equation that can separate the variables and the way to solve it is as follows: By integrating the two sides

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{1-x^2} + \int \frac{dy}{y^2} &= 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right) - \frac{1}{y} = c \\
&\Rightarrow \ln\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{y} = c \\
&\Rightarrow \frac{1}{y} = \ln\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} - c,
\end{aligned}$$

So the solution to the differential equation is و بالتالي حل المعادلة التفاضلية هو

$$y = \left(\ln\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} - c\right)^{-1}.$$

2.2.5 المعادلة التفاضلية الخطية Linear differential equation

5.2.5 : Definition - تعريف

تكون المعادلة التفاضلية خطية إذا كان المتغيرالتابع ومشتقاته في المعادلة من الدرجة الأولى .

The differential equation is linear if the dependent variable and its derivatives in the equation are of first degree.

فالصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبةالأولى تكون :

The general form of a linear differential equation of the first order is:

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$$

It is called linear in y.

وتسمى خطية في y.

أما المعادلة الخطية في x فإنها على الصورة :

As for the linear equation in x, it takes the form:

$$\frac{dx}{dy} + xa(y) = b(y)$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى من الشكل :

The general solution of the differential equation of the first order is of the form:

$$y(x) = e^{-I(x)}\left(\int e^{I(x)}Q(x)\,dx + c\right)$$

where :

حيث :

$$I(x) = \int P(x)\,dx$$

and c is a constant.

و c عدد ثابت .

9.2.5 : Example - مثال

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

Find the general solution to the following differential equation:

$$(y + y^2)dx - (y^2 + 2xy + x)dy = 0$$

الحل : المعادلة خطية في x ، حيث يمكن وضعها على الشكل التالي :

The solution :

The equation is linear in x, so it can be put in the following form:

$$\frac{dx}{dy} + xa(y) = b(y)$$

بقسمة طرفي المعادلة على $dy(y+y^2)$ نجد

Dividing both sides of the equation by $dy(y+y^2)$, *we get*

$$\frac{dx}{dy} - \frac{y^2+2xy+x}{y+y^2} = 0$$

so that أي أن

$$\frac{dx}{dy} - \frac{y^2}{y+y^2} - \frac{2xy+x}{y+y^2} = 0 \Longrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{2y+1}{y+y^2}x = \frac{y^2}{y+y^2}$$

بمقارنة المعادلة الناتجة مع المعادلة الأولى نجد

By comparing the resulting equation with the first equation, we find

$$b(y) = \frac{y^2}{y+y^2}, \qquad a(y) = -\frac{2y+1}{y+y^2}$$

Then ومنه

$$I(y) = e^{-\int \frac{2y+1}{y+y^2}dy} = e^{\ln\left(\frac{1}{y+y^2}\right)} = e^{-\ln\left(y+y^2\right)} = \frac{1}{y+y^2}$$

and و

$$\int I(y)\,b(y)\,dy = \int \frac{1}{y+y^2}\frac{y}{y+1}dy = \int \frac{1}{(y+1)^2}dy = -\frac{1}{y+1}$$

be the solution of the equation يكون حل المعادلة

$$I(y)\,x = \int I(y)\,b(y)\,dy + c$$

$$\frac{1}{y+y^2}x = -\frac{1}{y+1} + c$$

so أي

$$x = -y + c(y^2+y), c \in \mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

It is the general solution to the differential equation.

3.2.5 المعادلات المتجانسة Homogeneous equations

تكون المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى متجانسة عندما يمكن أن تكتب على الشكل:

A first order Differential Equation is Homogeneous when it can be in this form:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

يمكننا حلها باستخدام فصل المتغيرات ولكن أولاً ننشئ متغيرا جديد $v = \frac{y}{x}$.

We can solve it using separation of variables but first we create a new variable $v = \frac{y}{x}$.

باستخدام التحويل $y = vx$ و $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ يمكننا حل المعادلة التفاضلية.

Using $y = vx$ and $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ we can solve the differential equation.

هذا المثال سيوضح كيف يتم ذالك.

This example shows how this is done.

10.2.5 : Example - مثال

Solve أوجد حلول

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Can we get it in $F(\frac{y}{x})$ style? هل يمكننا كتابتها على الشكل $F(\frac{y}{x})$؟

We have: لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{xy} &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ &= \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \frac{y}{x} \end{aligned}$$

So وبالتالي

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \frac{y}{x}.$$

Now use separation of variables نستعمل الآن فصل المتغيرات

$$y = vx \text{ and } \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = v^{-1} + v$$

$$\Longrightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = v^{-1}$$
$$\Longrightarrow \quad vdv = \frac{1}{x}dx$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{v^2}{2} = \ln x + \ln c$$
$$\Longrightarrow \quad v^2 = 2(\ln cx) \Longrightarrow v = \pm\sqrt{2(\ln cx)}$$

Now substitute back $v = \frac{y}{x}$

بالتعويض بـ $v = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{2(\ln cx)} \Rightarrow y = x \pm \sqrt{2(\ln cx)}.$$

4.2.5 معادلة برنولي Bernoulli equation

معادلة برنولي التفاضلية هي نوع من المعادلات التفاضلية غير الخطية من الدرجة الأولى حيث يظهر المتغير التابع في المعادلة في كل من الأشكال الخطية وغير الخطية. يتم إعطاء الشكل العام لمعادلة برنولي التفاضلية من خلال:

A Bernoulli differential equation is a type of nonlinear first-order differential equation where the dependent variable appears in the equation in both linear and nonlinear forms. The general form of a Bernoulli differential equation is given by:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

حيث $n \neq 1$.

where $n \neq 1$.

فيما يلي مخطط عام لحل معادلة برنولي التفاضلية:

حوّل المعادلة إلى معادلة تفاضلية قابلة للفصل بقسمة كلا الطرفين على y^n **وإجراء الاستبدال** $z = y^{1-n}$.

Here is a general outline for solving a Bernoulli differential equation:
Transform the equation into a separable differential equation by dividing both sides by y^n and making the substitution $z = y^{1-n}$.

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

وهي معادلة تفاضلية عادية خطية من الدرجة الأولى، حلها من الشكل

This is a first-order linear ordinary differential equation, the solution is in the form:

$$z(x) = e^{-I(x)} \left((1-n) \int e^{I(x)} q(x)\, dx + c \right)$$

where : **حيث :**

$$I(x) = (1-n) \int p(x)\, dx$$

and c is a constant. **و c عدد ثابت .**

من أجل y باستخدام التعويض الأصلي $z = y^{1-n}$.

For y by using the original substitution $z = y^{1-n}$.

$$y = \pm \left(e^{-I(x)} \left((1-n) \int e^{I(x)} q(x)\, dx + c \right) \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

11.2.5 : Example - مثال

Let the differential equation لتكن المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} + yx^5 = x^5 y^7$$

هي معادلة برنولي مع $P(x) = x^5$ و $Q(x) = x^5$ و $n = 7$ ، لنجرب طريقة التعويض:

It is a Bernoulli equation with $P(x) = x^5$, $Q(x) = x^5$, and $n = 7$, let's try the substitution:

$$u = y^{1-n} = y^{-6}$$

In terms of y that is: بعبارة y تعطينا:

$$y = u^{-1/6}$$

نشتق y بالنسبة إلى x:

Differentiate y with respect to x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{6} u^{-7/6} \frac{du}{dx}.$$

نعوض $\frac{dy}{dx}$ و y في المعادلة الأصلية

Substitute $\frac{dy}{dx}$ *and* y *into the original equation*

$$\frac{-1}{6}u^{-7/6}\frac{du}{dx} + x^5u^{-1/6} = x^5u^{-7/6}$$

Multiply all terms by $-6u^{7/6}$

بضرب كل الأطراف في $-6u^{7/6}$

$$\frac{du}{dx} + x^5u = -6x^5.$$

لدينا الآن معادلة يمكن حلها.

We now have an equation we can hopefully solve.

5.2.5 معادلة ريكاتي Riccati equation

معادلة ريكاتي التفاضلية هي معادلة تفاضلية غير خطية من الدرجة الأولى تستخدم في نظرية التحكم وتحليل الأنظمة الديناميكية ونظرية النظام.
تتمثل إحدى طرق حل معادلة ريكاتي التفاضلية في تحويلها إلى معادلة تفاضلية خطية باستخدام تغيير المتغيرات. غالبا ما يشار إلى هذا باسم "طريقة الاستبدال". فيما يلي مخطط عام للخطوات المتضمنة:

A Riccati differential equation is a nonlinear first-order differential equation used in control theory, dynamic systems analysis, and system theory.
One way to solve a Riccati differential equation is by transforming it into a linear differential equation using a change of variables. This is often referred to as the "substitution method". Here is a general outline of the steps involved:

قم باستبدال المتغير : $y = u'/u$ **، حيث** u **متغير جديد.**
عوّض y **في معادلة ريكاتي التفاضلية للحصول على معادلة تفاضلية خطية بدلالة** u**.**
حل المعادلة التفاضلية الخطية باستخدام التقنيات المعروفة، مثل فصل المتغيرات أو طريقة المعاملات غير المحددة.

Make a substitution of the form: $y = u'/u$, where u is a new variable.
Substitute y into the Riccati differential equation to obtain a linear differential equation in terms of u.
Solve the linear differential equation for u using standard techniques, such as separation of variables or the method of undetermined coefficients.

بمجرد العثور على u ، يمكن العثور على y باستخدام المتغير الأصلي $y = u'/u$.
أخيرا ، يمكن إيجاد الحل العام لمعادلة ريكاتي التفاضلية الأصلية بدمج y لإيجاد دالة لـ u ، ثم إيجاد u' من y.

Once u has been found, y can be found using the original substitution $y = u'/u$.
Finally, the general solution to the original Riccati differential equation can be found by integrating y to find a function for u, and then finding u' from y.

معادلة ريكاتي تأخذ الشكل:

A Riccati equation has this form:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y^2 + q(x)\,y + r(x) = 0 \qquad (1)$$

إذا كان $p(x) = 0$ ، فإن المعادلة (1) معادلة خطية ؛

If $p(x) = 0$; then equation (1) is linear;

إذا كان $r(x) = 0$ ؛ فإن المعادلة (1) هي معادلة برنولي ؛

If $r(x) = 0$; then equation (1) is Bernoulli;

إذا كان p ؛ q و r ثوابت ، فإن المعادلة (1) ذات متغيرات قابلة للفصل

If p; q and r are constants, then equation (1) is separable

$$\frac{dy}{py^2 + qy + r} = dx$$

12.2.5 : Example - مثال

حل المعادلة التفاضلية

Solve the differential equation

$$y' = y + y^2 + 1.$$

المعادلة المعطاة هي معادلة ريكاتي بسيطة ذات معاملات ثابتة. هنا يمكن فصل المتغيرين x و y بسهولة، لذا يمكن الحصول على الحل العام للمعادلة من خلال

The given equation is a simple Riccati equation with constant coefficients. Here the variables x

and y can be easily separated, so the general solution of the equation is given by

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y + y^2 + 1, \;\Rightarrow \frac{dy}{y+y^2+1} = dx,\\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y+y^2+1} = \int dx,\\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+y+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \int dx,\\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \int dx,\\
&\Rightarrow \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = x + C,\\
&\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2y+1}{\sqrt{3}} = x + C.
\end{aligned}$$

6.2.5 معادلة من الرتبة الثانية Second order equation

يمكننا حل معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية من النوع:

We can solve a second order differential equation of the type:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)}$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ و $f(x)$ هي دوال في x باستخدام:

where $P(x)$, $Q(x)$ and $f(x)$ are functions of x, by using:

– **طريقة المعاملات غير المحددة التي تعمل فقط عندما يكون $f(x)$ متعدد الحدود ، أو الأسي، أو الجيب، أو جيب التمام، أو تركيبة خطية منهما.**

Undetermined coefficients which only works when $f(x)$ is a polynomial, exponential, sine, cosine or a linear combination of those.

– **طريقة الثوابت المتغيرة التي تعمل على مجموعة واسعة من الدوال.**

Variation of parameters which works on a wide range of functions.

هنا نبدأ بتعلم الحالة التي يكون فيها $f(x) = 0$ (وهذا يجعلها معادلة متجانسة):

Here we begin by learning the case where $f(x) = 0$ (this makes it "homogeneous"):

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0.}$$

وأيضا حيث تكون الدالتان $P(x)$ و $Q(x)$ ثوابت a و b:

and also where the functions $P(x)$ and $Q(x)$ are constants a and b:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0.}$$

سنستخدم خاصية إشتقاق الدالة الأسية:

We are going to use a special property of the derivative of the exponential function:

في أي نقطة، مشتق e^x يساوي قيمة e^x:

At any point the slope (derivative) of e^x equals the value of e^x :

And when we introduce a value r like this: وعندما ندخل القيمة r مثل:

$$f(x) = e^{rx}.$$

We find: نجد:

$$f'(x) = re^{rx} \quad and \quad f'(x) = r^2e^{rx}$$

بعبارة أخرى ، فإن المشتقات الأولى والثانية لـ $f(x)$ كلاهما من مضاعفات $f(x)$. هذا سوف يساعدنا كثيرا!

In other words, the first and second derivatives of $f(x)$ are both multiples of $f(x)$. This is going to help us a lot!

1.2.5 : Theorem - نظرية

Let the differential equation لتكن المعادلة التفاضلية

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = Q(x)}$$

ولبكن $\Delta = a^2 - 4b$ مميز المعادلة المميزة لها

and let $\Delta = a^2 - 4b$ be the discriminant of the characteristic equation of her

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$$

1)− إذا كان $\Delta > 0$ و كانت r_1 و r_2 جذوراً للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

If $\Delta > 0$ and r_1 and r_2 are roots of the characteristic equation, the general solution is:

$$\boxed{y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + y_p(x)}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت و $y_p(x)$ حل خاص.

where C_1 and C_2 are constants and $y_p(x)$ a particular solution.

2)− إذا كان $\Delta = 0$ و كان r جذراً مضاعفا للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

If $\Delta = 0$ and r is a double root of the characteristic equation, then the general solution is:

$$\boxed{y = e^{rx}\left(C_1 + C_2 x\right) + y_p(x)}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت و $y_p(x)$ حل خاص.

where C_1 and C_2 are constants and $y_p(x)$ a particular solution.

3)− إذا كان $\Delta < 0$ و كان $r = \alpha + i\beta$ جذراً للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

If $\Delta < 0$ and $r = \alpha + i\beta$ is a root of the characteristic equation, then the general solution is:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right) + y_p(x)}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت و $y_p(x)$ حل خاص.

where C_1 and C_2 are constants and $y_p(x)$ a particular solution.

مثال - Example : 13.2.5

لتكن المعادلة — *Let the equation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

ليكن $y = e^{rx}$ ومنه نحصل على: — *Let $y = e^{rx}$ so we get:*

$$\frac{dy}{dx} = re^{rx} \quad and \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2e^{rx}$$

بالتعويض في المعادلة السابقة: — *Substitute these into the equation above:*

$$r^2e^{rx} + re^{rx} - 6e^{rx} = 0$$

Simplify: بعد التبسيط:

$$e^{rx}(r^2+r-6)=0 \Longrightarrow r^2+r-6=0.$$

لقد اختزلنا المعادلة التفاضلية إلى معادلة تربيعية عادية!

We have reduced the differential equation to an ordinary quadratic equation!

تُعطى هذه المعادلة التربيعية الاسم الخاص للمعادلة المميزة. يمكننا تحليل هذا العامل إلى:

This quadratic equation is given the special name of characteristic equation. We can factor this one to:

$$(r-2)(r+3)=0 \Longrightarrow r_1=2 \quad and \quad r_2=-3$$

and so we have two solutions: ومنه لدينا حلين:

$$y_1=e^{2x} \quad and \quad y_2=e^{-3x}$$

لكن هذه ليست الإجابة النهائية لأنه يمكننا الجمع بين مضاعفات مختلفة لهاتين الإجابتين للحصول على حل أكثر عمومية:

But that's not the final answer because we can combine different multiples of these two answers to get a more general solution:

$$y=Ay_1+By_2=Ae^{2x}+Be^{-3x}$$

14.2.5 : Example - مثال

$$4\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+y=0$$

The characteristic equation is: المعادلة المميزة هي:

$$4r^2+4r+1=0$$

Then ومنه

$$(2r+1)^2=0 \Longrightarrow r=-\frac{1}{2}$$

So the solution of the differential equation is: ومنه حل المعادلة التفاضلية هو:

$$y = Ae^{(\frac{1}{2})x} + Bxe^{(-\frac{1}{2})x} = (A + Bx)\, e^{(-\frac{1}{2})x}$$

15.2.5 : Example - مثال

$$(I): \quad \frac{d^2y}{d^2x} + y = 2$$

The characteristic equation is: المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + 1 = 0$$

then و منه

$$r_1 = i \quad and \quad r_2 = -i.$$

So the solution is in the form: ومنه يكون الحل على الشكل

$$\boxed{y = C_1e^{it} + C_2e^{-it} + y_p(t)}$$

حيث $y_p(t)$ الحل الخاص، وهنا نريد تبسيط هذا المقدار (وضعه في صورة أخرى وهي صيغة أويلر).

Where $y_p(t)$ is the special solution, and here we want to simplify this amount (put it in another form, which is Euler's formula).

$$\boxed{C_1e^{it} = C_1\cos(t) + iC_1\sin(t) \quad and \quad C_2e^{-it} = C_2\cos(t) - iC_2\sin(t)}$$

بجمع المعادلتين معاً (مع مراعاة الحدود المشابهة) نجد:

Adding the two equations together (taking into account similar terms), we get:

$$\boxed{y = C_1e^{it} + C_2e^{-it} = (C_1 + C_2)\cos(t) + i(C_1 - C_2)\sin(t)}$$

و بالتعويض في المعادلة (I) أي أن الحل الخاص مساوي لـ 2 لتصبح المعادلة هي :

And by substituting in the equation (I), that is, the special solution is equal to 2, so that the equation becomes:

$$y = A\cos(t) + B\sin(t) + 2,$$

this is the general solution to the equation. وهذا هو الحل العام للمعادلة .

7.2.5 الحل الخاص Particular solution

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو حل فريد من نوعه على شكل $y = f(x)$، والذي يحقق المعادلة التفاضلية. يتم اشتقاق الحل الخاص للمعادلة التفاضلية عن طريق تعيين قيم للثوابت الكيفية للحل العام للمعادلة التفاضلية.

Particular solution of the differential equation is a unique solution of the form y = f(x), which satisfies the differential equation. The particular solution of the differential equation is derived by assigning values to the arbitrary constants of the general solution of the differential equation.

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)}$$

قد تضمن $f(x)$ كلاً من دالة الجيب وجيب التمام. ومع ذلك ، حتى لو تضمن $f(x)$ مصطلح الجيب فقط أو مصطلح جيب التمام فقط، يجب أن يكون كلا المصطلحين موجودين في تخمين الحل الخاص. تعمل طريقة المعاملات المتغيرة أيضا مع كثيرات الحدود والدوال الأسية والجيب وجيب التمام. تم تلخيص بعض النماذج الرئيسية لـ $f(x)$ والتخمينات المرتبطة بـ $y_p(x)$ في هذا الجدول.

$f(x)$ may include both sine and cosine functions. However, even if $f(x)$ included a sine term only or a cosine term only, both terms must be present in the guess. The method of undetermined coefficients also works with products of polynomials, exponentials, sines, and cosines. Some of the key forms of $f(x)$ and the associated guesses for $y_p(x)$ are summarized in this Table.

$f(x)$	Initial guess for $y_p(x)$ التخمين الأولي لـ $y_p(x)$
k (a constant) ثابت	A (a constant) ثابت
$ax+b$	$Ax+B$ يجب أن يتضمن كلا المصطلحين حتى لو كان $b=0$ The guess must include both terms even if $b=0$.
ax^2+bx+c	Ax^2+Bx+C يجب أن يتضمن المصطلحات الثلاثة حتى لو كان b أو c صفرا The guess must include all three terms even if b or c are zero.
كثيرات الحدود من الدرجة n Higher-order polynomials	متعدد الحدود من نفس الترتيب مثل $f(x)$ Polynomial of the same order as $f(x)$
$ae^{\lambda x}$	$Ae^{\lambda x}$
$ae^{\alpha x}\cos\beta x+be^{\alpha x}\sin\beta x$	$Ae^{\alpha x}\cos\beta x+Be^{\alpha x}\sin\beta x$
$(ax^2+bx+c)e^{\lambda x}$	$(Ax^2+Bx+C)e^{\lambda x}$
$(a_2x^2+a_1x+a_0)\cos\beta x$ $+(b_2x^2+b_1x+b_0)\sin\beta x$	$(A_2x^2+A_1x+A_0)\cos\beta x$ $+(B_2x^2+B_1x+B_0)\sin\beta x$
$(a_2x^2+a_1x+a_0)e^{\alpha x}\cos\beta x$ $+(b_2x^2+b_1x+b_0)e^{\alpha x}\sin\beta x$	$(A_2x^2+A_1x+A_0)e^{\alpha x}\cos\beta x$ $+(B_2x^2+B_1x+B_0)e^{\alpha x}\sin\beta x$

16.2.5 : Example - مثال

Let لتكن

$$\frac{dy}{dx}=x^2 \Longrightarrow dy=x^2dx$$

بتكامل الطرفين، نحصل على

Integrating both sides, we get

$$\int dy=\int x^2dx$$

إذا حللنا هذه المعادلة لإيجاد قيمة y نحصل على

If we solve this equation to figure out the value of y we get

$$y = \frac{x^3}{3} + C$$

حيث C ثابت كيفي. في الحل الذي تم الحصول عليه أعلاه ، نرى أن y دالة في x. بالتعويض عن هذه القيمة y في المعادلة التفاضلية المحددة ، يصبح كلا طرفي المعادلة التفاضلية متساويين.

where C is an arbitrary constant. In the above-obtained solution, we see that y is a function of x. On substituting this value of y in the given differential equation, both the sides of the differential equation becomes equal.

3.5 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 5*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

حدد حل المعادلة التفاضلية

Determine the solution to the differential equation

$$3y' + 4y = 0$$

الذي يحقق الشرط الإبتدائي $y(0) = 2$.

which satisfies the initial condition $y(0) = 2$.

الحــل

هذه المعادلة تكتب على الشكل التالي

This equation is written in the following form

$$y' = -\frac{4}{3}y$$

إذن الحل الذي يحقق الشرط الإبتدائي هو

So the solution that satisfies the initial condition is

$$y(x) = y(0)\, e^{-\frac{4}{3}x}$$

then **أي:**

$$y(x) = 2e^{-\frac{4}{3}x}.$$

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

لتكن المعادلة التفاضلية التالية:

Let the differential equation be:

$$y' + 2xy = x. \qquad (E)$$

1) أوجد حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة.

Find the solutions to the homogeneous differential equation.

2) أوجد حلول المعادلة (E) التي تحقق $y(0) = 1$.

Find the solutions to the equation (E) which satisfies $y(0) = 1$.

الحــل

الدوال الأصلية للدالة $a(x) = 2x$ هي الدوال $A(x) = x^2/2 + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$ هو ثابت كيفي. ومنه حلول المعادلة المتجانسة E هي كل الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ من الشكل:

The primitive functions of $a(x) = 2x$ are the functions $A(x) = x^2/2 + k$ where $k \in \mathbb{R}$ is a arbitrary constant. Hence, the solutions to the homogeneous equation E are all functions defined on $\mathbb{R}$ of the form:

$$y(x) = ce^{-x^2}$$

حيث $c \in \mathbb{R}$ ثابت كيفي.

where $c \in \mathbb{R}$ is an arbitrary constant.

نبحث الآن عن الحل الخاص لـ E من الشكل:

Now we look for the particular solution of E of the form:

$$y_p(x) = c(x)e^{-x^2}$$

بإستعمال طريقة تغيير الثوابت. لدينا :

using the variable constants method. We've got :

$$y_p'(x) + 2xy_p(x) = c'(x)e^{-x^2}.$$

ومنه y_p هو حل لـ E إذا وفقط إذا كان : $c'(x) = xe^{x^2}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.

Of which y_p is a solution to E if and only if: $c'(x) = xe^{x^2}$ for each $x \in \mathbb{R}$.

لتكن الدالة $c(x)$ من بين الدوال الأصلية للدالة xe^{x^2} على سبيل المثال :

Let the function $c(x)$ be among the primitive functions of the function xe^{x^2}, for example:

$$c(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

ومنه الدالة y_p حيث

then the function y_p where

$$y_p(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}e^{-x^2} = \frac{1}{2}$$

هي حل لـ E. وعليه، حلول المعادلة E هي كل الدوال من الشكل :

is a solution to E. Therefore, the solutions to the equation E are all functions of the form:

$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2} \quad ; c \in \mathbb{R}.$$

حيث y حل للمعادلة E_1، هنا الشرط $y(0) = 1$ يكافئ : $c = 1/2$.

where y is a solution to equation E_1, here the condition $y(0) = 1$ is equivalent to: $c = 1/2$.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

أوجد حلول المعادلة التفاضلية التالية:

Find the solutions to the following differential equation:

$$y' + 2y = -4, \qquad y(1) = -3.$$

الحــل

لنحل المعادلة التفاضلية التالية

Let's solve the following differential equation

$$y' + 2y = -4$$

نحل المعادلة المتجانسة

We solve the homogeneous equation

$$y' + 2y = 0$$

التي حلولها هي الدوال

whose solutions are the functions

$$t \mapsto Ce^{-2t}, C \in \mathbb{R}.$$

نبحث عن حل خاص، نلاحظ أن الدالة الثابتة $y(t) = -2$ هي حل خاص. وبالتالي فإن حلول المعادلة هي الدوال

We are looking for a particular solution and we notice that the constant function $y(t) = -2$ is solution. The solutions of the equation are therefore the functions

$$y(t) = -2 + Ce^{-2t}.$$

Then we have : إذن لدينا:

$$y(1) = -3 \Longrightarrow -2 + Ce - 2 = -3 \Longrightarrow C = -e^2.$$

أخيراً، الحل الوحيد للمشكلة المدروسة هو

Finally, the only solution of the considered problem is

$$y(t) = -e^{2-2t} - 2.$$

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

نقترح التكامل على أكبر مجال ممكن في $]0,\infty[$ للمعادلة التفاضلية:

We propose to integrate over the largest possible interval in $]0,\infty[$ of the differential equation:

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2 \qquad (E).$$

1) أوجد $a \in]0,\infty[$ حيث $y(x) = ax$ حل خاص y_0 للمعادلة (E).

Find $a \in]0,\infty[$ where $y(x) = ax$ is a particular solution y_0 of equation (E).

2) أثبت أن تغيير الدالة : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ يحول المعادلة (E) إلى المعادلة التفاضلية:

Prove that changing the function: $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$. Converts the equation (E) to the differential equation:

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \qquad (E_1)$$

3) أوجد حلول (E_1) على $]0,\infty[$.

Solve (E_1) by $]0,\infty[$.

4) أوجد كل حلول المعادلة (E) المعرفة على $]0,\infty[$.

Find all solutions to the equation (E) defined on $]0,\infty[$.

الحــل

لنحل المعادلة التفاضلية التالية

Let's solve the following differential equation

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1) **نبحث على** $a \in]0, \infty[$ **حيث** $y_0(x) = ax$ **يكون حل خاص للمعادلة، ولأن**

We are looking for $a \in [0, \infty[$ where $y_0(x) = ax$ is a special solution to the equation, and because

$$y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} - y_0(x)^2 = -a^2x^2,$$

y_0 **هو حل إذا وفقط إذا كان** $a = \pm 3$. **و ليكن** $a = 3$.

y_0 is a solution if and only if $a = \pm 3$, we take $a = 3$.

2) **إذا كانت** z **دالة من الصنف** $\mathcal{C}^1$ **ولا تنعدم، نضع**

If z is a function of class $\mathcal{C}^1$ and does not null, we set

$$y(x) = 3x - 1/z(x).$$

ومنه y **حل إذا وفقط إذا كان :**

of which y is a solution if and only if:

$$\frac{z'(x)}{z(x)^2} + \frac{1}{xz(x)} - \frac{1}{z(x)^2} + \frac{6x}{z(x)} = 0.$$

بالضرب في $z(x)^2$ **نحصل على** y **حل للمعادلة السابقة إذا وفقط إذا كان** z **يحقق**

Multiplying by $z(x)^2$ we get y is a solution to the previous equation if and only if z satisfies

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \qquad (E_1)$$

3) **لنحل المعادلة** (E_1) **على المجال** $]0, \infty[$. **نأخذ دالة أصلية للدالة** $x \mapsto 6x + 1/x$ **الدالة** $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$

ومنه حلول المعادلة المتجانسة هي الدالة:

Let's solve the equation (E_1) over the interval $]0, \infty[$. We take a primitive function of $x \mapsto 6x + 1/x$ the function $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$. Then, the solutions of the homogeneous equation are the function:

$$x \mapsto Ae^{-3x^2-\ln(x)}.$$

لنبحث عن حل خاص للمعادلة (E_1) من الشكل

Let's find a special solution to the equation (E_1) of the form

$$z_p(x) = \alpha(x)e^{-3x^2-\ln(x)}$$

ومنه z_p هو حل إذا كان

Hence, z_p is a solution if

$$\alpha'(x)e^{-3x^2-\ln(x)} = 1$$

أي إذا كان $\alpha'(x) = xe^{3x^2}$ على سبيل المثال إذا كان $\alpha(x) = e^{3x^2}/6$.
حلول المعادلة (E_1) هي :

i.e. for example if $\alpha'(x) = xe^{3x^2}$ and $\alpha(x) = e^{3x^2}/6$. The solutions to the equation (E_1) are:

$$z(x) = \frac{1 + Ae^{-3x^2}}{6x}, \qquad \text{where} \qquad A \in \mathbb{R}.$$

4) **سنستنتج الآن حلول (E) المعرفة على المجال $]0,\infty[$.**

We will now derive the solutions of (E) defined on the interval $]0,\infty[$.

ليكن y حل من الصنف $\mathcal{C}^1$ معرف على المجال $]0,\infty[$. ولنفرض مبدئيا أن $y(x) > 3x$ على المجال المفتوح $I \subset]0,\infty[$، بأكبر قدر ممكن. ومنه

Let y be a solution of class $\mathcal{C}^1$ defined on the interval $]0,\infty[$. Let's assume that $y(x) > 3x$ is on the open interval $I \subset [0,\infty[]$, as large as possible. Then

$$y(x) = 3x - 1/z_I(x)$$

من أجل بعض الدوال $z_I < 0$ من الصنف $\mathcal{C}^1$ على I. حسب السؤال السابق ، لدينا بالضرورة أن:

For some functions $z_I < 0$ of class $\mathcal{C}^1$ on I. According to the previous question, we necessarily have that:

$$z_I(x) = \frac{1 + A_I e^{-3x^2}}{6x}$$

من أجل الثابت $A_I \in \mathbb{R}$. ولأن $z_I < 0$ فإن $A_I < 0$ لكن $I \neq]0, +\infty[$ لأن $1 > A_I e^{-3x^2}$ إذا كان x كبير بما يكفي. وبالتالي، يوجد مجال مفتوح J بحيث يكون $y(x) < 3x$ على J.

for the constant $A_I \in \mathbb{R}$, and because $z_I < 0$ then $A_I < 0$ but $I \neq]0, +\infty[$ because $1 > A_I e^{-3x^2}$ if x is big enough. Thus, there is an open interval J such that $y(x) < 3x$ over J.

نفترض مرة أخرى أن J كبير بقدر الإمكان. و أن في J، $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$ لبعض الدوال $z_J > 0$ من الصنف $\mathcal{C}^1$. مرة أخرى من السؤال السابق،

We assume again that J is as large as possible and that in J , $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$ for some functions $z_J > 0$ of class $\mathcal{C}^1$. Again from the previous question,

$$z_J(x) = \frac{1 + A_J e^{-3x^2}}{6x}$$

حيث A_J ثابت.

where A_J is a constant.

لأن المجال المفتوح $J =]a, b[$ كان من المفترض أن يكون الحد الأقصى، ومنذ ذلك الحين y يفترض أن يتم تعريفه على المجال $]0, +\infty[$ إذا كان $a > 0$ فإن $y(a) = 3a$ و نفس الشيء إذا كان $b < \infty$، $y(b) = 3b$، لأنه إن لم يكن باستمرارية الدالة y يكون لدينا $y(x) < 3x$ على المجال $]a - \epsilon, b + \epsilon[$ من أجل $\epsilon > 0$ صغير. هذا ممكن فقط على التوالي إذا كان $z_J(x) \to +\infty$ عندما $x \to a$ أو $z_J(x) \to +\infty$ عندما $x \to b$. لكن لقد قلنا أن:

Because the open interval $J =]a, b[$ was supposed to be the maximum, and since y is assumed to be defined on the interval $]0, +\infty[$ if $a > 0$ then $y(a) = 3a$ and the same if $b < \infty$, $y(b) = 3b$, because if it weren't for the continuity of the function y we would have $y(x) < 3x$ over $]a - \epsilon, b + \epsilon[$ for small $\epsilon > 0$. This is only possible respectively if $z_J(x) \to +\infty$ when $x \to a$ or $z_J(x) \to +\infty$ when $x \to b$. But we have said that:

$$z_J = \frac{1 + A_J e^{-3x^2}}{6x},$$

لذلك هذا غير ممكن على الإطلاق (باستثناء إذا كان على التوالي $a = 0$ و $b = 0$).

So this is not possible at all (except if respectively $a = 0$ and $b = 0$).

ومنه ليكن $y(x) = 3x$ على المجال $]0, +\infty[$ وليكن $y(x) < 3x$ على المجال $]0, +\infty[$ في هذه الحالة الأخيرة، $z(x) = 1/(3x - y(x))$ معرف على المجال $]0, +\infty[$ ويكتب :

So, let $y(x) = 3x$ over the interval $]0, +\infty[$ and let $y(x) < 3x$ over $]0, +\infty[$ in this last case, $z(x) = 1/(3x - y(x))$ defined on the interval $]0, +\infty[$ and write:

$$z(x) = [1 + Ae^{-3x^2}]/6x.$$

لأن $z > 0$، بالضرورة $A \geq -1$. ومنه إذا كان y حل فإن:

Because $z > 0$, is necessarily that $A \geq -1$. Hence, if y is a solution, then:

$$y(x) = 3x \qquad \text{أو} \qquad y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + Ae^{-3x^2}} \qquad \text{حيث } A \geq -1.$$

على العكس من ذلك ، إذا كان y معرف، فإن y معرف و من الصنف $\mathcal{C}^1$ على المجال $]0, \infty[$، ويمكننا التحقق من أنه حل.

Conversely, if y is defined, then y is defined and of class $\mathcal{C}^1$ on the interval $]0, \infty[$, and we can verify that it is a solution.

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

لتكن المعادلة التفاضلية التالية

Let the following differential equation

$$y'' + 2y = 0$$

1) حل هذه المعادلة.

Solve this equation.

2) أوجد الدالة f التي تحقق حلا للمعادلة التفاضلية السابقة والتي تحقق الشروط التالية: $f(0) = 1$ و $f'(0) = -2$.

Find the function f that solves the previous differential equation and that satisfies the following conditions: $f(0) = 1$ and $f'(0) = -2$.

الحـــل

1) تكتب المعادلة من الشكل :

Write the equation in the form:

$$y'' + \left(\sqrt{2}\right)^2 y = 0$$

ومنه حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ التي تأخذ الشكل:

and its solutions are the functions defined on $\mathbb{R}$ that take the form:

$$\alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2) الدالة f التي تحقق حلا للمعادلة التفاضلية السابقة والتي تحقق الشروط التالية: $f(0) = 1$ و $f'(0) = -2$ أي يوجد $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ حيث:

The function f that achieves a solution to the previous differential equation and that fulfills the following conditions: $f(0) = 1$ and $f'(0) = -2$, i.e. there is $alpha, \beta \in \mathbb{R}$ where:

$$f(x) = \alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x \Longrightarrow f(0) = \alpha = 1$$

و

$$f'(x) = \sqrt{2}\beta \cos \sqrt{2}x - \sqrt{2}\alpha \sin \sqrt{2}x \Longrightarrow \sqrt{2}\beta = -2 \Longrightarrow \beta = -\sqrt{2}$$

أي الدالة التي تحقق الشرطين هي:

Which function satisfies both conditions is:

$$f(x) = \cos \sqrt{2}x - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x.$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية:

Find the solutions to the following differential equations:

1) $y'' - 3y' + 2y = e^x.$
2) $y'' - y = -6 \cos x + 2x \sin x.$
3) $4y'' + 4y' + 5y = \sin x e^{-x/2}.$

الحــل

لتكن المعادلة:

Let the equation:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

كثير الحدود المميز:

the characteristic polynomial is

$$f(r) = (r-1)(r-2)$$

وبالتالي فإن حلول المعادلة المتجانسة هي جميع الدوال:

So the solutions to the homogeneous equation are all functions:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} \quad \text{حيث} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

نبحث عن حل خاص من الشكل $y_p(x) = P(x)e^x$ **نحن في الحالة** $(ıı)$ **الشرط** $(*)$ **على** P **هو :** $P'' - P' = 1$ **و** $P(x) = -x$ **محقق.**

We are looking for a special solution of the form $y_p(x) = P(x)e^x$. We are in the condition $(ıı)$ $(*)$ over P is : $P'' - P' = 1$ and $P(x) = -x$ verifies:

لذلك فإن حلول المعادلة هي الدوال من الشكل:

Therefore, the solutions to the equation are functions of the form:

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2e^{2x} \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

هنا $y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x$.

$0 = (r-1)(r+1)$ **المعادلة المتجانسة لها حلول من الشكل:**

Here $0 = (r-1)(r+1)$ the homogeneous equation has solutions of the form:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

نلاحظ أن الدالة $3\cos x$ **تحقق المعادلة :** $y'' - y = -6\cos x$**، لذلك علينا إيجاد حل** y_1 **للمعادلة** $y'' - y = 2x\sin x$ **لأن** $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$ **سيكون حلاً للمعادلة المدروسة. لهذا، نلاحظ أن** $2x\sin x = \mathrm{Im}(2xe^{ix})$ **ونستخدم الطريقة الموضحة أعلاه لإيجاد حل** z_1 **للمعادلة :** $y'' - y = 2xe^{ix}$. **نبحث عن** z_1 **على الشكل** $P(x)e^{ix}$ **حيث** P **هي كثيرة الحدود من الدرجة 1 لأن** $f(i) = -2 \neq 0$. **لدينا** $f'(i) = 2i$ **الشرط** $(*)$ **على** P **ومنه :** $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$ **الذي يعطي بعد التعريف** $P(x) = -x - i$.

ومنه

We note that the function $3\cos x$ satisfies the equation: $y'' - y = -6\cos x$, so we need to solve y_1 for the equation $y'' - y = 2x\sin x$ because $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$ will be a solution to the studied equation. For this, we note that $2x\sin x = \mathrm{Im}(2xe^{ix})$ and we use the above method to solve z_1 for the equation: $y'' - y = 2xe^{ix}$. We are looking for z_1 of the form $P(x)e^{ix}$ where P. It is a polynomial of degree 1 because $f(i) = -2 \neq 0$. we've got $f'(i) = 2i$ condition $(*)$ on P, from which: $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$ which gives the definition dimension $P(x) = -x - i$. Then

$$y_1(x) = \mathrm{Im}((-x+i)e^{ix}) = -x\sin x - \cos x.$$

وبالتالي فإن الحلول هي الدوال:

So the solutions are functions:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + 2\cos x - x\sin x \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

طريقة أخرى لإيجاد حل لـ $y''-y = 2x\sin x$: نبحث عن الحل من الشكل $y_1(x) = A(x)\sin x+B(x)\cos x$ حيث A, B هي كثيرات الحدود من الدرجة 1 لأن i ليس جذر المعادلة المميزة نحسب y_1'، y_1'' ونطبق المعادلة المدروسة على y_1 . . . نتحصل على الشرط :

$$(A'' - A - 2B')\sin x + (B'' - B - 2A') = 2x\sin x$$

الذي يتحقق إذا كان :

Another way to solve for $y'' - y = 2x\sin x$: We look for the solution from the form $y_1(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$ where A, B are polynomials of degree 1 because i is not the root of the characteristic equation. We calculate y_1', y_1'' and apply the studied equation to y_1 . . . we get the condition:

$$(A'' - A - 2B')\sin x + (B'' - B - 2A') = 2x\sin x$$

which is achieved if:

$$\begin{cases} A'' - A - 2B' = 2x \\ B'' - B - 2A' = 0 \end{cases}.$$

ونكتب: $A(x) = ax + b$ ت $B(x) = cx + d$، بعد التحديد نحصل : $a = d = -1$، $b = c = 0$ الذي يحدد y_1.

And we write: $A(x) = ax + b$ et $B(x) = cx + d$, after defining we get: $a = d = -1$, $b = c = 0$ which defines y_1.

$.4y'' + 4y' + 5y = \sin xe^{-\frac{x}{2}}$

المعادلة المميزة لها جذران مركبان $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ و $r_2 = \overline{r_1}$ وحلول المعادلة المتجانسة هي:

The characteristic equation has two complex roots $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ and $r_2 = \overline{r_1}$. The solutions to the homogeneous equation are:

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

لدينا

$$\sin xe^{-\frac{x}{2}} = \operatorname{Im}(e^{(-\frac{1}{2}+i)x}),$$

نبدأ بالبحث عن حل z_p من المعادلة مع الطرف الثاني الجديد $e^{(-1/2+i)x}$. لأن $-\frac{1}{2} + i$ هو جذر المعادلة المميزة ، نبحث عن:

we've got

$$\sin xe^{-\frac{x}{2}} = \operatorname{Im}(e^{(-\frac{1}{2}+i)x}),$$

We start by finding the solution to the z_p of the equation with the new second side $e^{(-1/2+i)x}$. Because $-\frac{1}{2} + i$ is the root of the characteristic equation, we look for:

$$z_p(x) = P(x)e^{(-\frac{1}{2}+i)x}$$

حيث P من الدرجة 1. وبالتالي الشرط $(*)$ على P :

Where P is of degree 1. Hence the condition $(*)$ on P :

$$4P'' + f'(-1/2 + i)P' + f(-1/2 + i)P = 1$$

Writes **يكتب :**

$$8iP' = 1(P'' = 0 \quad f(-\frac{1}{2} + i) = 0 \;\; \text{و} \;\; f'(-\frac{1}{2} + i) = 8i)$$

لذلك يمكننا أن نأخذ $P(x) = -i/8x$ و $z_p(x) = -\frac{i}{8}xe^{(-\frac{1}{2}+i)x}$ ومن هنا الجزء التخيلي:

So we can take $P(x) = -i/8x$ and $z_p(x) = -\frac{i}{8}xe^{(-\frac{1}{2}+i)x}$ Hence the imaginary part is:

$$y_p(x) = \mathrm{Im}(-\frac{i}{8}xe^{(-\frac{1}{2}+i)x}) = \frac{1}{8}x\sin xe^{-\frac{x}{2}}$$

هو حل معادلتنا. لذلك فإن الحلول هي جميع الدوال من الشكل :

is the solution to our equation. So the solutions are all functions of the form:

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}(c_1\cos x + (c_2 + \frac{1}{8}x)\sin x) \quad \text{where} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

الفصل السادس

دوال متعددة المتغيرات *Multivariate functions*

فهرس الفصل

1.6 دوال ذات عدة متغيرات *Multivariate functions*

ندرس في هذا الجزء وبإختصار التقنيات الحسابية للدوال الحقيقية ذات عدة متغيرات حقيقية. يعد هذا الفصل هو أول فصل بالنسبة للطلبة خلال السنة الموالية لهذا فضلنا أن يكون الفصل بدون سلسلة تمارين وأكتفينا بأمثلة توضيحية فقط.

In this part, we study briefly the computational techniques of real functions with several real variables. This chapter is the first chapter for students during the following year. Therefore, we preferred that the chapter be without a series of exercises, and we contented ourselves with illustrative examples only.

1.1.6 دوال حقيقية Real functions

في هذا الجزء سوف ندرس الدوال ذات المتغيرات المتعددة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$ ، ويمكن أيضا دراستها في الإطار العام أي على $\mathbb{R}^n$ وبالتالي ستكون هذه الدوال من الشكل:

In this part, we will study functions with multivariables defined on $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}^3$, and they can also be studied in the general framework, i.e. on $\mathbb{R}^n$ and thus will be these functions are of the form:

$$\begin{array}{rlcl} f: & E \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & f(x_1, x_2, ..., x_n). \end{array}$$

where $n \geq 1$ is a natural number **حيث $n \geq 1$ عدد طبيعي**

بعبارة أخرى، ستكون عناصر مجموعة البداية E أشعة من الشكل $x = (x_1, \ldots, x_n)$ وستكون عناصر المجموعة النهائية أعداد حقيقية.

In other words, the elements of the starting set E will be vectors of the form $x = (x_1, \ldots, x_n)$ and the elements of the final set will be real numbers.

2.1.6 منحنى دالة ذات عدة متغيرات Curve of a multivariate function

لتسهيل التصور، سوف نأخذ $n = 2$ لتمثيل السطوح وباقي الأبعاد. الحالة $n \geq 3$ تناقش بنفس الطريقة.

To make it easier to visualize, we'll take $n = 2$ to represent the surfaces and the rest of the dimensions. The case $n \geq 3$ is discussed in the same way.

1.1.6 : Definition - تعريف

نسمي بيان أو منحنى دالة ذات متغيرين مجموعة النقاط :

We call the statement or the curve of a function in two variables the set of points:

$$\Gamma_f \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) \right\}$$

أي الأزواج من المستوي xOy التي ترتبط بـ z. وبالتالي نحتاج ثلاث محاور لتمثيل هذا البيان.

Each pairs of plane xOy are related to z. Thus we need three axes to represent this statement.

1.1.6 : Example - مثال

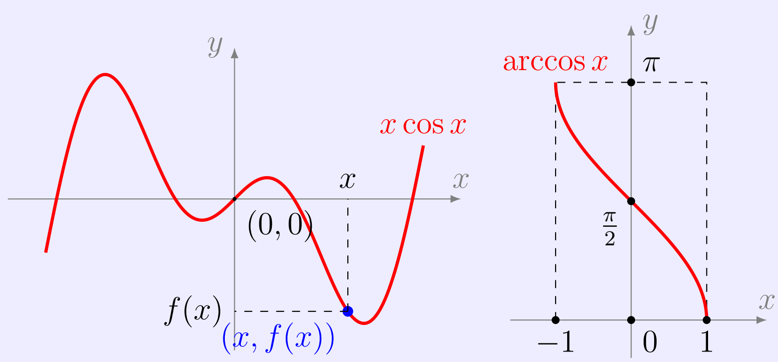
من أجل $n=1$، $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: وهي أبسط حالة، $x\mapsto f(x)$.

For $n=1$, $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: In the simplest case, $x\mapsto f(x)$.

فيما يلي الرسوم البيانية للدوال :

Here are the graphs of the functions:

$$x\mapsto x\cos x \quad \textit{and} \quad x\mapsto \arccos x$$



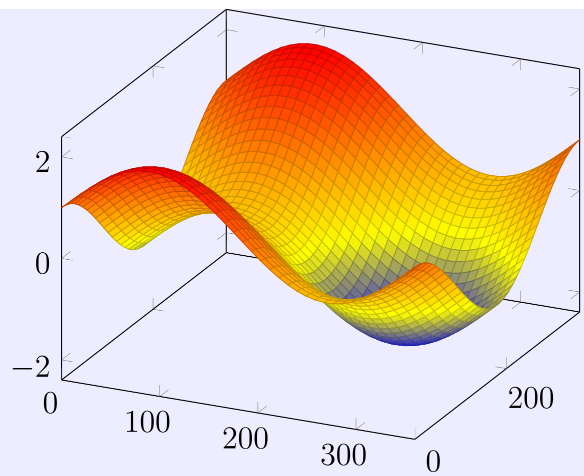
2.1.6 : Example - مثال

من أجل $n=2$، $f:E\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. نرمز إلى المتغيرات بالرمز (x,y).

For $n=2$, $f:E\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. We denote variables as (x,y).

الدوال $(x,y)\mapsto f(x,y)$، يتم تمثيلها، على سبيل المثال، من خلال الأسطح :

The functions $(x,y)\mapsto f(x,y)$, are represented, for example, by surfaces:



المنحنى يمثل الدالة

The curve represents the function

$$(x, y) \mapsto cos(y) + sin(x).$$

بمجرد أن يكون $n > 2$ ، من الصعب جدا الحصول على رؤية رسومية للدوال ذات عدة متغيرات.

Once $n > 2$, it is very difficult to get a graphical view of functions with several variables.

3.1.6 مجموعة التعريف Definition set

2.1.6 : Definition - تعريف

مجموعة تعريف دالة ذات عدة متغيرات هي مجموعة القيم $(x_1, x_2, ..., x_n)$ التي تجعل $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ معرفا. ونرمز لها بالرمز D_f.

The set definition of a function with several variables is the set of $(x_1, x_2, ..., x_n)$ that makes $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ is identifier. We denote it by D_f.

3.1.6 : Example - مثال

لتكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة حيث

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a function where

$$f(x, y) = \frac{1}{x - y}$$

لكي تكون الدالة f معرفة يجب أن تكون $x - y \neq 0$ وعليه:

For the function f to be defined, it must be $x - y \neq 0$, so:

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\right\}.$$

4.1.6 النهايات في Limit in $\mathbb{R}^n$

قبل أن نتحدث عن الاستمرارية والتفاضل، يجب أن نحدد مفهوم النهاية في الفضاء $\mathbb{R}^n$. حيث يمكن تعميم مفهوم النهايات والاستمرار للدوال ذات متغير واحد على الدوال ذات عدة متغيرات دون تعقيد، يكفي استبدال القيمة المطلقة بالمعيار الإقليدي أو نظيم بصفة عامة.

Before we talk about continuity and differentiation, we need to define the concept of limit in space $\mathbb{R}^n$. Where the concept of limits and continuation of functions with one variable can be generalized to functions with several variables without complication, it is sufficient to replace the absolute value with the Euclidean standard or the norm in general.

3.1.6 : Definition - تعريف

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ (نستخدم بشكل عام $E = \mathbb{R}^n$). نسمي نظيم على E التطبيق

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

الذي يحقق مايلي: *which achieves the following:*

- الفصل *Separation*

$$\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

- التجانس الإيجابي *Positive homogeneity*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$$

Triangle inequality • المتراجحة المثلثية

$$\forall x, y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

لجعل الدرس أبسط، سنستخدم مفهوم النظيم طوال بقية الدرس، والمسافات المعيارية بدلاً من المساحات المترية. إذن ما يلي يمكن أن يتناسب تماما مع سياق المساحات المترية، من خلال فهمها بسهولة أكبر.

To make the lesson simpler, throughout the rest of the lesson we will use the concept of regularity, and standard spaces instead of metric spaces. So what follows can fit perfectly into the context of metric spaces, by understanding them more easily.

4.1.6 : Definition - تعريف

ليكن $\|\cdot\|$ **نظيم على** $\mathbb{R}^n$. **ولتكن** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متتالية في** $\mathbb{R}^n$ **و** $l \in \mathbb{R}^n$. **نقول أن المتتالية** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تؤول نحو** l **ونكتب**

Let $\|\cdot\|$ *be a norm on* $\mathbb{R}^n$. *Let* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *be sequence in* $\mathbb{R}^n$ *and* $l \in \mathbb{R}^n$. *We say that the sequence* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converges to* l *and we write*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l$$

If we have: **إذا كان لدينا:**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m > N, \|x_m - l\| \leq \varepsilon.$$

بعبارات أخرى x_n **تؤول نحو** l **إذا كانت القيمة الحقيقية** $\|x_n - l\|$ **تؤول للـ** 0 **بالمعنى المعتاد.**

In other words, x_n *converges to* l *if the true value* $\|x_n - l\|$ *converges to* 0 *in the usual sense.*

نزود الفضاء $\mathbb{R}^n$ **بالنظيم الذي نرمز له بالرمز** $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ **و الفضاء** $\mathbb{R}^m$ **بالنظيم** $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$. **و لتكن** $\mathcal{D}$ **مجموعة جزئية من** $\mathbb{R}^n$ **و** f **دالة معرفة من** $\mathcal{D}$ **نحو** $\mathbb{R}^m$.

We provide the space $\mathbb{R}^n$ with the norm denoted by $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ and the space $\mathbb{R}^m$ with the norm $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$, and let $\mathcal{D}$ be a subset of $\mathbb{R}^n$ and f is a function defined from $\mathcal{D}$ to $\mathbb{R}^m$.

5.1.6 : Definition - تعريف

لتكن $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$ و $l \in \mathbb{R}^m$:

Let $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$ and $l \in \mathbb{R}^m$:

نقول أن الدالة f تؤول نحو l عند النقطة $\mathbf{a}$ ونكتب

We say that the function f converges to l at the point $\mathbf{a}$ and we write

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l$$

if we have إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - l\|_{\mathbb{R}^m} \leq \varepsilon$$

Properties خواص

1.1.6 : Proposition - قضية

لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $\mathcal{D}$ من $\mathbb{R}^n$ تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$. لتكن $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$. لتكن $\lambda \in \mathbb{R}$. ليكن l_1، $l_2 \in \mathbb{R}$. نفرض أن $f(\mathbf{x})$ و $g(\mathbf{x})$ تؤول على الترتيب نحو l_1 و l_2 عندما $\mathbf{x}$ يؤول لـ $\mathbf{a}$. ومنه:

Let f and g be a functions defined on the domain $\mathcal{D}$ of $\mathbb{R}^n$ that take their values in $\mathbb{R}$ and $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$. Let $\lambda \in \mathbb{R}$ and l_1, $l_2 \in \mathbb{R}$. Suppose that $f(\mathbf{x})$ and $g(\mathbf{x})$ respectively converges to l_1 and l_2 when $\mathbf{x}$ converges to $\mathbf{a}$. Then:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (f + \lambda g)(\mathbf{x}) \longrightarrow l_1 + \lambda l_2$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (fg)(\mathbf{x}) \longrightarrow l_1 l_2.$$

أيضا، إذا كان $l_1 = 0$ و g محدودة في جوار $\mathbf{a}$ فإنه لدينا:

Also, if $l_1 = 0$ and g are bounded in the neighborhood of $\mathbf{a}$ then we have:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} (fg)(\mathbf{x}) \longrightarrow 0.$$

أخيرا، إذا كان $l_1 \neq 0$ فإن الدالة f لاتنعدم ابدا في جوارالنقطة $\mathbf{a}$ و

Finally, if $l_1 \neq is0$ then the function f never nulls in the neighborhood of the point $\mathbf{a}$ *and*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{1}{f(\mathbf{x})} \longrightarrow \frac{1}{l_1}.$$

2.1.6 : Proposition - قضية

لتكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة حيث $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$. لنفرض أيضا أن

Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a function where $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$. Let's also assume that

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، $\lim_{y\to b} f(x,y)$ موجودة ومن أجل كل $y \in \mathbb{R}$، $\lim_{x\to a} f(x,y)$ موجودة، فإن:

For all $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y\to b} f(x,y)$ exists and for every $y \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x,y)$ exists, then:

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = l.$$

لتكن f دالة $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ معرفة على $\mathbb{R}^n \backslash x_0$ و $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Let f be a function $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defined on $\mathbb{R}^n \backslash x_0$ and $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

6.1.6 : Definition - تعريف

بنفس الطريقة نعرف النهاية في اللانهاية $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ كمايلي :

In the same way, we define the limit in infinity $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ as follows:

$$\forall A > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E : 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x)\| > A.$$

4.1.6 : Example - مثال

Let the function f be defined as follows لتكن الدالة f المعرفة كما يلي

$$f(x,y) = x^2 + y\sin(x + y^2).$$

1) لنثبت أن f تؤول إلى 0 لما $(x,y) \to (0,0)$.

Let's prove that f converges to 0 because $(x,y) \to (0,0)$.

الدالة $f(x,y)$ محدودة باستعمال $|\sin(t)| \leq 1$: نجد

The function $f(x,y)$ is bounded by $|\sin(t)| \leq 1$: we find

$$\left|f(x,y)\right| = \left|x^2 + y\sin(x+y^2)\right| \leq x^2 + |y|\left|\sin(x+y^2)\right| \leq x^2 + |y|$$

نأخذ $0<\epsilon<1$ ، $a=\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ **و** $b=\frac{\epsilon}{2}$ ، **إذاً من أجل** $x\in]-a,a[$ ، **لدينا** $x^2<\frac{\epsilon}{2}$ ، **من أجل** $y\in]-b,b[$ **لدينا** $|y|<\frac{\epsilon}{2}$. **ومنه من أجل** $(x,y)\in]-a,a[\times]-b,b[$ **نجد:**

We take $0<\epsilon<1$, $a=\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ *and* $b=\frac{\epsilon}{2}$, *so for* $x\in]-a,a[$, *we have* $x^2<\frac{\epsilon}{2}$, *for* $y\in]-b,b[$ *we have* $|y|<\frac{\epsilon}{2}$ *and then, for* $(x,y)\in]-a,a[\times]-b,b[$ *we find:*

$$\left|f(x,y)\right| \leq x^2 + |y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

أحد قيم δ **التي تحقق النهاية هي** $\delta=\frac{\epsilon}{2}$ ، **إذا كان** $\|(x,y)\|<\delta$ **فإن** $|x|<\delta=\frac{\epsilon}{2}\leq\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ **و** $|y|<\delta=\frac{\epsilon}{2}$ **ومنه** $|f(x,y)|<\epsilon$. **نستنتج :** f **تقبل نهاية** 0 ، **لما** (x,y) **تؤول إلى** $(0,0)$.

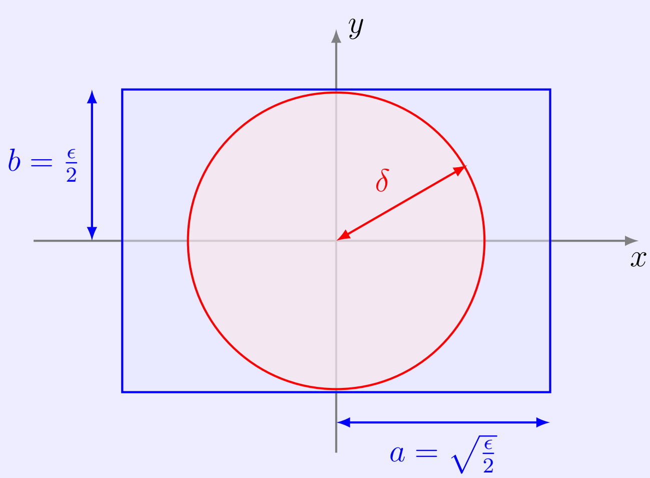
One of the values of δ *that meets the limit is* $\delta=\frac{\epsilon}{2}$, *if* $\|(x,y)\|<\delta$ *the* $|x|<\delta=\frac{\epsilon}{2}\leq\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ *and* $|y|<\delta=\frac{\epsilon}{2}$ *from which* $|f(x,y)|<\epsilon$. *We conclude:* f *accepts the limit* 0, *when* (x,y) *becomes* $(0,0)$.

2) **نبحث عن** U **مجال مفتوح يحوي** $(0,0)$ **بحيث من أجل كل** $(x,y)\in U$ **يكون لدينا** $|f(x,y)|<\frac{1}{100}$.

We are looking for U *open interval containing* $(0,0)$ *such that for every* $(x,y)\in U$ *we have* $|f(x,y)|<\frac{1}{100}$.

من أجل $\epsilon=\frac{1}{100}$ **لدينا** $a=\frac{1}{\sqrt{200}}$ **و** $b=\frac{1}{200}$. **من أجل كل** (x,y) **من المجال** $]-a,a[\times]-b,b[$ ، **لدينا** $|f(x,y)|<\frac{1}{100}$.

For $\epsilon=\frac{1}{100}$ *we have* $a=\frac{1}{\sqrt{200}}$ *and* $b=\frac{1}{200}$. *For each* (x,y) *of the interval* $]-a,a[\times]-b,b[$, *we have* $|f(x,y)|<\frac{1}{100}$.



5.1.6 عمليات على النهايات Operations on limit

نادرا ما يستخدم التعريف في حساب النهايات و بدلاً من ذلك ، نستخدم النظريات العامة: من عمليات على النهايات على الدوال ذات عدة متغيرات، فلا توجد أي صعوبة أو حداثة في ذلك.

The definition is rarely used in calculating limits. Instead, we use general theorems: operations on limits on functions with several variables, there is no difficulty or novelty in this.

3.1.6 : Proposition - قضية

لتكن $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **معرفتين في جوار** $x_0 \in \mathbb{R}^n$ **حيث** f **و** g **تقبل نهاية عند** x_0. **لدينا الخواص التالية**

Let $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined in the neighborhood of $x_0 \in \mathbb{R}^n$ where f and g accept a limit at x_0. We have the following properties

$$\lim_{x_0}(f+g) = \lim_{x_0} f + \lim_{x_0} g, \qquad \lim_{x_0}(f \times g) = \lim_{x_0} f \times \lim_{x_0} g$$

$$\lim_{x_0} \frac{1}{g} = \frac{1}{\lim\limits_{x_0} g}, \qquad \lim_{x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim\limits_{x_0} f}{\lim\limits_{x_0} g}$$

5.1.6 : Example - مثال

لتكن الدالة f **المعرفة على** $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ **كما يلي:**

Let the function f defined on $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ as follow:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

لنثبت أن الدالة f **لا تقبل نهاية عند النقطة** $(0,0)$. **لهذا نفرض أن** f **تؤول نحو النهاية** $l \in \mathbb{R}$ **عند** $(0,0)$.
من أجل $n \in \mathbb{N}$ **نضع :**

Let's prove that the function f does not accept a limit at the point $(0,0)$. For this we assume that f converges to $l \in \mathbb{R}$ at $(0,0)$. For $n \in \mathbb{N}$ we put:

$$u_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \text{ و } v_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

لدينا:
We have

$$\lim_{n\to\infty} u_n = (0,0) \text{ و } \lim_{n\to\infty} f(u_n) = 0$$

ومنه حسب خصائص النهايات $l = 0$. من جهة أخرى لدينا:
Then, according to the properties of the limits, $l = 0$. *On the other hand we have:*

$$\lim_{n\to\infty} v_n = (0,0) \text{ و } f(v_n) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(v_n) = \frac{1}{2}$$

ومنه لدينا أيضا $l = \frac{1}{2}$. النهاية ليست وحيدة ما يثبت أن الدالة f لا تقبل نهاية عند النقطة $(0,0)$.
So, we also have $l = \frac{1}{2}$. *The limit is not unique, which proves that the function* f *does not accept a limit at the point* $(0,0)$.

6.1.6 : Example - مثال

لتكن الدالة f المعرف على $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ كما يلي:
Let the function f *defined on* $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ *as follow:*

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

من أجل $r > 0$ و $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا:
For $r > 0$ *and* $\theta \in \mathbb{R}$ *we have:*

$$|f(rcos(\theta), rsin(\theta))| = \frac{r^4cos^2(\theta)sin^2(\theta)}{r^2} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

هذا يثبت أن f يؤول إلى 0 عند النقطة $(0,0)$.
this proves that f *converges to* 0 *at the point* $(0,0)$.

6.1.6 الإستمرار Continuity

الآن وقد حددنا مفهوم النهاية، فسوف نعرف الاستمرارية لدالة من عدة متغيرات.

Now that we've defined the concept of limit, we'll define continuity for a function of several variables.

7.1.6 : Definition - تعريف

لتكن $\mathcal{D}$ مجال من $\mathbb{R}^n$ و $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$. ولتكن الدالة f المعرفة من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^m$:

Let $\mathcal{D}$ be an interval of $\mathbb{R}^n$ and $\mathbf{a} \in \mathcal{D}$. Let the function f be defined from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$:

$i)$ نقول أن الدالة f مستمرة في النقطة $(\mathbf{x})$ إذا كان $f(\mathbf{a})$ تؤول إلى $f(\mathbf{a})$ عندما $\mathbf{x}$ يؤول إلى $\mathbf{a}$. ونكتب:

We say that the function f is continuous at the point $(\mathbf{x})$ if $f(\mathbf{a})$ converges to $f(\mathbf{a})$ when $\mathbf{x}$ converges to $\mathbf{a}$ and we write:

$$\lim_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{a}).$$

$ii)$ نقول أن الدالة f مستمرة على $\mathcal{D}$ إذا كانت مستمرة على كل نقطة من $\mathcal{D}$.

We say that a function f is continuous on $\mathcal{D}$ if it is continuous on every point of $\mathcal{D}$.

8.1.6 : Definition - تعريف

لتكن $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. ولتكن $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_m) \in E$ ومنه الدوال $f_1, ..., f_m$ المعرفة كما يلي:

Let $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ and $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_m) \in E$, of which the functions $f_1, ..., f_m$ are defined as follows:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (a_1, .., a_{i-1}, x, a_{i+1}, .., a_m) \in E$$

$$\begin{aligned} f_i : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(a_1, .., a_{i-1}, x, a_{i+1}, .., a_m) \end{aligned}$$

من أجل $i = 1, ..., m$ تسمى دالة جزئية في النقطة $\mathbf{a}$.

for $i = 1, ..., m$ is called a partial function at the point $\mathbf{a}$.

4.1.6 : Proposition - قضيـة

لتكن $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ دالة مستمرة في النقطة $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_m)$ ومنه الدوال $f_1, ..., f_m$ المعرفة كمايلي :

Let $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ be continuous at the point $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_m)$, then the functions $f_1, ..., f_m$

defined as follows:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (a_1, .., a_{i-1}, x, a_{i+1}, .., a_m) \in E,$$

$$\begin{aligned} f_i : E &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(a_1, .., a_{i-1}, x, a_{i+1}, .., a_m) \end{aligned}$$

من أجل $i = 1, ..., m$ هي دوال مستمرة عند a_i .

for $i = 1, ..., m$ are a continuous functions at a_i.

العكس ليس دوما صحيح! على سبيل المثال: لتكن $l \in \mathbb{R}$ إذا كانت $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دالة حيث

The opposite is not always true! For example: let $l \in \mathbb{R}$ if $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is a function where

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{x \to 0} f(x, \alpha x) = l.$$

هل نستنتج أن f مستمرة عند النقطة $(0,0)$ ؟ الجواب : لا.

Do we conclude that f is continuous at point $(0, 0)$? The answer is no.

معايير الاستمرارية Continuity criteria

1.1.6 : Theorem - نظرية

لتكن $f : E \subset \mathbb{R}^m \to F \subset \mathbb{R}^n$ دالة مستمرة، فإن الخواص التالية متكافئة:

Let $f : E \subset \mathbb{R}^m \to F \subset \mathbb{R}^n$ a continuous function, then the following properties are equivalent:

- f مستمر في كل نقطة من E.

f is continuous at each point of E

- من أجل كل مجال مفتوح U من F، $f^{-1}(U)$ فهو مجال مفتوح من E.

For every U open interval from F, $f^{-1}(U)$ is open interval from E.

- من أجل كل مجال مغلوق V من F، $f^{-1}(V)$ فهو مجال مغلوق من E.

For every closed interval V of F, $f^{-1}(V)$ is closed interval of E.

- من أجل كل متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من E تؤول نحو x_0 فإن المتتالية $(f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تؤول نحو $f(x_0)$ من أجل كل $x_0 \in E$.

For each sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of E converges to x_0 then the sequence $(f(x_n)_{n\ in\mathbb{N}}$ converges $f(x_0)$ for each $x_0 \in E$.

7.1.6 Derivation الإشتقاق

تذكير: ليكن $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للإشتقاق على المجال $I \subset \mathbb{R}$. فإن مشتق الدالة عند النقطة $a \in I$ يعطى بالشكل:

Reminder: Let $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a differentiable function on the interval $I \subset \mathbb{R}$. The derivative of the function at the point $a \in I$ is given in the form:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

كما فرضنا سابقا، إذا كان $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ و $\mathbf{a} \in E$. عبارة التذكير السابق لا معنى لها لأنه لا يمكنك القسمة على شعاع. من ناحية أخرى، إذا ثبتنا مركبات الشعاع $\mathbf{x}$ باستثناء واحدة، فيمكننا حينها تعريف المشتقات الجزئية لهذه الدالة f بالطريقة التالية.

As previously assumed, if $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ and $\mathbf{a} \in E$. The previous recall statement is meaningless because you cannot divide by a vector. On the other hand, if we fix the components of the vector $\mathbf{x}$ except for one, then we can define the partial derivatives of this function f in the following way.

9.1.6 : Definition - تعريف

لتكن $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ و $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_m) \in E$. من أجل $i = 1, ..., m$، نسمي مشتق جزئي بالنسبة للمتغير x_i للدالة f عند النقطة $\mathbf{a}$ ونرمز له بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ المشتق للدالة الجزئية f مأخوذ في a_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{x_i\to a_i} \frac{f(a_1, ..., x_i, ..., a_m) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_m)}{x_i - a_i}.$$

من أجل دالة ذات متغيرين $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ في النقطة $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in E$ المشتقات الجزئية للدالة f عند النقطة (a_1, a_2) هي مشتقات الدوال الجزئية عند المتغير $x_1 \to f(x_1, a_2)$ و $x_2 \to f(a_1, x_2)$ حيث x_1 و $x_2 \in \mathbb{R}$ يحسب بالشكل التالي :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h},$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2+h) - f(a_1, a_2)}{h}.$$

نرمز لهته النهاية بالرمز:

We denote this limit by:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

وهو المشتق الجزئي للدالة f بالنسبة للمتغير x_i عند النقطة x_0. الرمز ∂ يُقرأ $d\ rond$. ونرمز أيضا $\partial_{x_i} f(x_0)$ أو $f'_{x_i}(x_0)$. لدينا إذن m مشتق جزئي في النقطة x_0 :

It is the partial derivative of the function f with respect to the variable x_i at the point x_0. The symbol ∂ is read as $d\ rond$. We also denote by $\partial_{x_i} f(x_0)$ or $f'_{x_i}(x_0)$. So we have m partial derivative at the point x_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0).$$

في حالة دالة ذات متغيرين $(x,y) \mapsto f(x,y)$ لدينا :

In the case of a bivariate function $(x,y) \mapsto f(x,y)$ we have:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

ملاحظة - Remark : 1.1.6

إذا كانت $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ فإن الدوال الجزئية f_i للدالة f من أجل $i = 1, ..., n$ تقبل m مشتق جزئي.
سنرى ذلك في تعريف المصفوفة اليعقوبية.

If $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ then the partial functions f_i of the function f for $i = 1, ..., n$ accepts m partial derivative. We will see this in the definition of the Jacobian matrix.

مثال - Example : 7.1.6

من أجل كل عدد حقيقي y ثابت، الدالة $x \mapsto e^x \cos y$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$، والذي يبرر وجود المشتق الجزئي فيما يتعلق بالمتغير الأول حيث:

For every constant real number y, the function $x \mapsto e^x \cos y$ is differentiable on $\mathbb{R}$, which justifies the existence of the partial derivative with respect to the first variable where:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y.$$

نفس الشيء بالنسبة للمتغير الثاني

The same for the second variable

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y.$$

10.1.6 : Definition - تعريف

مصفوفة المشتقات الجزئية للدالة $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ نسمى المصفوفة اليعقوبية أو يعقوبي الدالة f.
نرمز لها بالرمز $J(f)_{x_0}$ التي تحوي m عمود و n سطر :

The matrix of partial derivatives of the function $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ it's called The Jacobean matrix or Jacobean function f. We denote it by $J(f)_{x_0}$ which contains m column and n line :

$$J(f)_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_m} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

بعبارة أخرى، إذا كان $x = (x_1, ..., x_m)$ من أجل الدالة الشعاعية $f(x_1, ..., x_m)$ التي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}^n$ اليعقوبي يحمل في أعمدته الأشعة $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. بصفة خاصة، من أجل دالة ذات m متغير حقيقي فإن اليعقوبي عبارة عن مصفوفة سطر:

In other words, if $x = (x_1, ..., x_m)$ is for the vector function $f(x_1, ..., x_m)$ that takes its values in $\mathbb{R}^n$, the Jacobian carries in his columns the vectors $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Specifically, for a function with m real variables, the Jacobian is a line matrix:

$$J(f)_{(x_1,...,x_m)} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}\right)$$

ومنقول هذا السطر هو مصفوفة العمود الذي نرمز له بالرمز:

The transpose of this line is the column matrix, which we denote by:

$$grad(f)_{(x_1,...,x_m)} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}\right)^T.$$

$grad$ يسمى انحدار الدالة f ويرمز له بالرمز $\nabla f(x)$ (الذي يقرأ نابلة f لـ x).

$grad$ is called the gradient of the function f and denoted by $\nabla f(x)$ (which reads nabla f for x).

8.1.6 : Example - مثال

أثبت أن الدوال التالية قابلة للتفاضل، وأحسب مصفوفة اليعقوبي.

Prove that the following functions are differentiable, and calculate the Jacobi matrix.

- $$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \quad \sin x \sin y\right).$$
- $$f(x, y) = \left(xy, \quad \frac{1}{2}x^2 + y, \quad \ln(1 + x^2)\right).$$
- $$f(x, y) = x^2 y^3.$$

يكفي التحقق من أن والدوال الجزئية أو دوال الإحداثيات قابلة للإشتقاق، ومن الواضح أنها من الصنف C^∞. لدينا على التوالي:

It is enough to verify that the partial functions or coordinate functions are differentiable, and they are obviously of the class $C\infty$. We have respectively:

- $$J(f)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} x & 0 & -z \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{pmatrix}.$$
- $$J(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}.$$
- $$J(f)_{(x,y)} = \left(2xy^3, 3x^2y^2\right) \implies \nabla f\,(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix}.$$

المصادر

[1] Allab, K. Eléments d'analyse : fonction d'une variable réelle O.P.U., 1986.

[2] Azouly, E., Avignant, J. Auliac, G. Les mathématiques en Licence, 1ére. Tome 1: Cours+ exos, MIAS. MASS. SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.

[3] Azouly, E., Avignant, J. Auliac, G. Les mathématiques en Licence, 1ére. Tome 2: Cours+ exos, MIAS. MASS. SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.

[4] Azouly, E., Avignant, J. Auliac, G. Problèmes Corrigés de mathématiques , DEUG MIAS/SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2002.

[5] Baba-Hamed. C, Benhabib. K, Analyse. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1993.

[6] Baba-Hamed. C, Benhabib. K, Algèbre. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1990.

[7] Bayart, F. Bibmath.net, https://www.bibmath.net/

[8] Chambadal, L. Exercices et problèmes résolus d'analyse : mathématiques spéciales. Bordas, 1973.

[9] Exo7 Cours et exercices de mathématiques, http://exo7.emath.fr/un.html

[10] Godement, R. Cours d'algèbre. Hermann, 1966.

[11] Grifone, J. Algèbre linéaire. Cépaduès Éditions, Toulouse, 2011. 4e édition.

[12] Hitta, A. Cours d'algèbre et exercices corrigés. O.P.U., 1994.

[13] Liret, F., Martinais, D. Algèbre 1re année. Dunod, 2003. 2e édition.

[14] Mortad, M. H. Exercices Corrigés d'Algèbre, Première Année L.M.D., Edition "Dar el Bassair" (Alger-Algérie), 2012.

[15] Pierre, G. Matrices, géométrie, algèbre linéaire. Nouvelle bibliothèque mathématique.

Cassini, 2001. Traduction de Gabrielle Arnaudiès.

[16] Queysanne, M. Algèbre, collection U, Armand Colin, 1971.

[17] محمد حازي 2017 بوابة التحليل التفاضلي، الدوال ذات عدة متغيرات دروس مبسطة وتمارين منوعة. منشورات المجلس الأعلى للغة العربية، ديدوش مراد الجزائر.

[18] سعود محمد و بن عيسى لخضر، 2009 التحليل الرياضي جزء واحو وإثنان ، ديوان المطبوعات الجامعية.

[19] قادة علاب 2010 عناصر من التحليل الرياضي (التوابع لمتغير حقيقي واحد) الجزء الأول عناصر من التحليل الرياضي (التوابع لمتغير حقيقي واحد) الجزء الأول و الجزء الثاني. ديوان المطبوعات الجامعية.